

SCHMIDT, HAROLD

DISS. FRANKFURT/MAIN QU

1985

*Dynamische Prozesse bei der optischen Bistabilität
in Halbleiterelementen*

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik

der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

in Frankfurt/Main

von

Harald Schmidt

aus Hanau

Frankfurt/Main

Januar 1985

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereiches Physik
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Dekan : Prof. Dr. B. Lüthi
Erstgutachter : Prof. Dr. H. Haug
Zweitgutachter : Prof. Dr. C. Klingshirn

Tag der Promotion : 13. Mai 1985

INHALTSVERZEICHNIS

1.0	Einleitung	1
2.0	Grundlagen der nichtlinearen Optik	5
3.0	Das System aus N Zwei-Niveau-Atomen	17
4.0	Optische Bistabilität in Halbleitern	31
4.1	Dispersive optische Bistabilität	34
4.1.1	Die stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung	47
4.1.2	Die dynamische Lösung der Langevingleichung	52
4.1.3	Diskussion der Ergebnisse	61
4.2	Optische Bistabilität aufgrund einer induzierten Absorption	63
4.2.1	Die stationäre Lösung	72
4.2.2	Die Dynamische Lösung der Bilanzgleichungen	78
4.2.3	Vergleich zwischen Theorie und Experiment	90
5.0	Zusammenfassung und Ausblick	99

<i>Anhang</i>	103
<i>A.0 Methoden zur Beschreibung stochastischer Prozesse</i>	105
<i>B.0 Programm zur Berechnung der Langevingleichungen</i>	113
<i>C.0 Die numerische Behandlung von parabolischen Differentialgleichungen</i>	123
<i>Referenzen</i>	133
<i>Danksagung</i>	143
<i>Lebenslauf</i>	145

In den beiden letzten Jahrzehnten wurden die optischen Eigenschaften von Halbleiterkristallen sowohl experimentell als auch theoretisch intensiv untersucht. Experimentell läßt man ein kohärentes Laserlichtbündel auf einen Kristall einfallen und mißt dann dessen Transmissions- und Reflexionsspektren als Funktion der Photonenenergie aus. Aus beiden Spektren gewinnt man Informationen über die durch das einfallende Licht erzeugte Polarisation im Kristall. Für sichtbares Licht wird diese Polarisation hauptsächlich durch elektronische Anregungen bestimmt.

Für niedrige Eingangsintensitäten ist die Polarisation eine lineare Funktion des elektrischen Feldes. Diese Beziehung geht mit anwachsender Intensität verloren. Die Spektren zeigen dann charakteristische, mit der Intensität variierende Änderungen, die allgemein durch eine intensitätsabhängige Polarisation beschrieben werden können. Einen Kristall, dessen Spektren sich intensitätsabhängig verändern, bezeichnet man als nichtlinear. In einem Resonator können diese Nichtlinearitäten zu optischer Bistabilität führen.

Fällt Licht senkrecht in einen Resonator ein, so tritt im Resonator infolge der Mehrfachreflexionen konstruktive oder destruktive Interferenz auf, die für lineare Medien zu der bekannten periodischen Variation der Transmission eines Resonators führen. Ersetzt man das lineare Medium durch ein Nichtlineares, ändert sich das Verhalten der Transmission drastisch. Die transmittierte Intensität ist jetzt eine nichtlineare Funktion der Eingangsintensität und kann sich unter bestimmten Bedingungen diskontinuierlich zwischen einem Zustand niedriger und einem Zustand hoher Transmission verändern. Dabei bildet sich eine Hysterese in der Transmission aus, dh. zu einer festen Eingangsintensität existieren zwei verschiedene Zustände der Transmission, die entsprechend der Vorgeschichte der Intensität angenommen werden können. Wegen dieser Eigenschaft nennt man diesen Effekt optische Bistabilität.

Betrachtet man die Energiebilanz eines Resonators, dann findet man einen stetigen Energiefluß vom Eingangs- zum Ausgangsfeld. Dieses System bildet deshalb ein typisches Beispiel für ein offenes System, das sich fern vom thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Die bei der optischen Bistabilität auftretenden diskontinuierlichen Übergänge in der Transmission sind dabei ein Indiz für einen Nichtgleichgewichtsphasenübergang erster

Ordnung. Obwohl sich dieses System fern vom Gleichgewicht befindet, stellt sich ein stationärer Zustand ein, wenn alle Ströme zeitlich konstant sind. Verändert man in einem solchen Fall das Eingangsfeld, wird der momentane Zustand des Systems destabilisiert und es bildet sich ein neuer stationärer Zustand aus. Schaltet man das elektrische Feld von einem niedrigen auf einen hohen Wert, kann es zu einem Übergang von einem Zustand niedriger Transmission zu einem Zustand hoher Transmission kommen. Dieser Übergang kann in Analogie zu einem Phasenübergang beschrieben werden. Das elektrische Feld spielt dabei die Rolle des Ordnungsparameters. Zur theoretischen Behandlung dieses Phasenüberganges stellt man eine nichtlineare Differentialgleichung für den Ordnungsparameter auf. Stationär beschreibt diese Gleichung eine Hysterese. In einem realen Kristall schwankt der Ordnungsparameter, beeinflusst durch das mikroskopische System, um einen mittleren Wert. Zur Beschreibung dieser Schwankungen werden zu den deterministisch Differentialgleichungen Rauschbeiträge addiert, die das mikroskopische System modellieren sollen.

In letzter Zeit gewinnen die Untersuchungen an optisch bistabilen Systemen zunehmend an Interesse. Zum einen stellt dieses System das relativ einfach zu untersuchende Beispiel eines Nichtgleichgewichtsphasenüberganges erster Ordnung dar. Zum Andern können bistabile Systeme Pulsieren, Periodenverdopplung und chaotisches Verhalten zeigen und bilden damit die ganze Vielfalt eines nichtlinearen dynamischen Systems aus /Gibbs 81, Lugiato 84/.

Die Forschung und Entwicklung auf dem Gebiet der optischen Bistabilität wird nicht nur durch diese Eigenschaften motiviert, sondern auch durch die Hoffnung, daß man mit Hilfe dieses Effektes die Elemente eines optischen Computers konstruieren kann.

Der steile Anstieg in der Transmission kann zur Verstärkung eines Eingangsfeldes verwendet werden, da zu kleinen Änderungen der Eingangsgröße große Änderungen der Ausgangsintensität gehören. In einigen Materialien wird das Eingangsfeld durch diesen Effekt bis um einen Faktor 1000 verstärkt und kann somit zur Konstruktion eines optischen Transistors verwendet werden. Mit der optischen Bistabilität kann aber nicht nur das Eingangsfeld verstärkt werden, sondern mit diesem Effekt kann auch ein Speicher- (Schalt-) element konstruiert werden. Dazu verwendet man den Zustand niedriger Transmission als logische "0" und den Zustand hoher Transmission als logische "1". Experimentell wurden schon "OR"-, "AND"-

und "NOR"-Gatter verwirklicht /Jewell 84/. Damit sind alle Elemente vorhanden, um einen optischen Computer zu bauen. Ein solcher Computer sollte möglichst kurze Schaltzeiten bei niedrigen Eingangsintensitäten und einer hohen Arbeitstemperatur besitzen. Beispielsweise konnte in mit Molekularstrahlepitaxie erzeugten Schichtstrukturen optische Bistabilität auch bei Zimmertemperatur beobachtet werden, da die Bindungsenergie der gebundenen Ladungsträger mit abnehmender Dimension anwächst /Gibbs 82, Chemla 83/. Zur Zeit widmen sich etliche Arbeitsgruppen der Suche nach optimalen Halbleitermaterialien und -elementen.

Der Vorteil eines reinen optischen Datenverarbeitungssystems ist, daß sich unterschiedliche Lichtstrahlen kreuzen können und die verschiedenen optischen Elemente (zB. Spiegel) von unterschiedlichen Strahlen gleichzeitig benutzt werden können. Der optische Computer würde sich deshalb besonders gut zur Parallelverarbeitung von optischen Daten eignen. Deshalb würde er wahrscheinlich bei der Verarbeitung von optisch übermittelten Daten (zB. bei der Bildverarbeitung oder als Verstärker in Lichtleitern) Verwendung finden. Diesem Problem sind zwei Sonderausgaben der "Proceedings of the IEEE" gewidmet, in denen nähere Einzelheiten nachgeschlagen werden können /Caulfield 77,84/.

Aufgrund dieser möglichen Anwendungen hat die optische Bistabilität großes technologisches Interesse hervorgerufen und stimuliert eine große Zahl von experimentellen und theoretischen Arbeiten.

Bei der theoretischen Beschreibung der optischen Bistabilität sind die gekoppelten Bewegungsgleichung für das elektrische Feld und für das Medium herzuleiten. Dies müsste mit einer vollständig quantenmechanischen Rechnung geschehen. Wegen der großen Photonenzahl des elektrischen Feldes erscheint es gerechtfertigt, Quanteneffekte der Felder zu vernachlässigen. Dies bezeichnet man als quasiklassische Näherung. Das elektromagnetische Feld ist jetzt durch die Maxwellschen Bewegungsgleichungen bestimmt. In diesen Gleichungen koppelt das elektrische Feld über die Polarisation mit dem Medium. Man stellt nun die quantenmechanische Bewegungsgleichung der Polarisation und aller mit ihr koppelnden Variablen auf.

Für ein System von Zwei- Niveau- Atomen beschreiben die Polarisation und die Inversion die Dynamik des Mediums vollständig. Diese beiden Bewegungsgleichungen werden zusammen mit den Maxwellschen Gleichungen als Maxwell- Bloch- Gleichungen bezeichnet. Viele nichtlineare optische Ef-



fekte werden durch diese Gleichungen beschrieben. In Kapitel 3 werden sie in Verbindung mit der optischen Bistabilität näher diskutiert.

Ähnlich wie in diesem einfachen Modell kann die Dynamik des Mediums auch für kompliziertere Modelle untersucht werden. Dabei wird der Kristall wieder quantenmechanisch behandelt, während das elektrische Feld als klassische Größe aufgefaßt wird. Da die Bewegungsgleichungen in diesem Fall nur schwer aufzustellen sind, werden Vielteilcheneffekte mittels der dielektrischen Funktion berücksichtigt. Diese dielektrische Funktion kann mit Hilfe von Vielteilchenmethoden näherungsweise berechnet werden. Sie bestimmt die dynamischen Eigenschaften von nichtlinearen Medien.

Diese Vorgehensweise wird in Kapitel 4 für zwei verschiedene Modelle explizit durchgeführt. Zum einen wird eine dispersive optische Bistabilität untersucht, die durch die Zwei-Photonenerzeugung von Exzitonenmolekülen entsteht. Diese Anregungen sind gebundene Zustände von zwei Elektron-Loch Paaren. Für einen CuCl-Kristall können die Materialgleichungen adiabatisch eliminiert werden. Der Einfluß der Fluktuationen des einfallenden Feldes ist für die Dynamik der optischen Bistabilität wichtig. Diese Fluktuationen werden mit Hilfe einer Langevingleichung berücksichtigt (Kapitel 4.1).

Außerdem wird der Fall einer reinen absorptiven optischen Bistabilität behandelt. Eine absorptive optische Bistabilität kann aufgrund von zwei verschiedenen Mechanismen entstehen. Im Fall einer ausbleichenden Absorption entsteht Bistabilität nur mit Hilfe eines Resonators. Im Gegensatz dazu steht der Mechanismus der induzierten Absorption, bei dem die optische Bistabilität keinen Resonator benötigt. Dieser würde sogar in diesem speziellen Fall sogar die auftretende Hysterese verkleinern. In dieser Arbeit wird ausschließlich die optische Bistabilität aufgrund einer induzierten Absorption untersucht. Diese Absorption beruht auf einer Verschiebung der Bandkante als Funktion der Dichte und der Temperatur. In dem hier untersuchten Fall wird die Absorption durch ein e-h Plasma beeinflusst. Da die zeitlichen Änderungen der Dichte und des elektrischen Feldes auf zwei getrennten Zeitskalen stattfinden, kann das elektrische Feld adiabatisch entkoppelt werden. Die Dynamik des System wird ausschließlich durch das zeitliche Verhalten der e-h Dichte bestimmt. Weiterhin wird der Fall der temperaturinduzierten Bistabilität kurz diskutiert. Die theoretischen Ergebnisse werden mit den experimentellen Ergebnissen verglichen.

2.0 GRUNDLAGEN DER NICHTLINEAREN OPTIK

Wird sichtbares Licht von einem Halbleiterkristall absorbiert, bewirkt es durch die Erzeugung von Elektron- Loch- Paaren, eine Polarisierung des Mediums. Diese Polarisierung des Kristalls kann mathematisch als eine Funktion des elektrischen Feldes dargestellt werden.

Entwickelt man die Polarisierung in eine Potenzreihe des elektrischen Feldes, bezeichnet man die Koeffizienten dieser Entwicklung als Suszeptibilitäten. In diesem Zusammenhang findet man, daß die intensitätsabhängigen Anteile dieser Suszeptibilität zu optischer Bistabilität führen.

Die Beschreibung von nichtlinearen Medien

Das elektromagnetische Feld wird durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Für den stromfreien Fall lauten diese

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot} H &= \partial_t D & \operatorname{div} H &= 0 \\ c \operatorname{rot} E &= -\partial_t H & \operatorname{div} E &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Um die Wechselwirkung eines elektromagnetischen Feldes mit der Materie vollständig beschreiben zu können, müssen noch die Materialgleichungen berücksichtigt werden. Diese sind durch die Verknüpfung zwischen dem Verschiebungsfeld D und dem elektrischen Feld E mittels der dielektrischen Funktion ϵ , als

$$D = \epsilon(E) E \quad (2.2)$$

gegeben. Die entsprechende Relation für das Magnetfeld ist $B = \mu H$. Für die im weiteren untersuchten optischen Frequenzen gilt jedoch $\mu = 1$. Die dielektrische Funktion enthält die gesamte Information über das Medium und kann im allgemeinen durchaus noch eine Funktion des Feldes sein.

Das Verschiebungsfeld D wird in eine Summe aus dem elektrischen Feld E und der Polarisierung P des Mediums zerlegt:

$$D = \epsilon(E)E = E + 4\pi P . \quad (2.3)$$

Die durch Gleichung (2.3) definierte Polarisierung kann nun in eine Potenzreihe nach dem elektrischen Feld entwickelt werden :

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \dots . \quad (2.4)$$

Die einzelnen Ordnungen dieser Entwicklung sind durch

$$P_n(t) = \int dt_1 \dots dt_n K_n(t; t_1, \dots, t_n) E(t_1) \dots E(t_n) \quad (2.5)$$

gegeben /Flytzanis 75/. Im Quasiteilchenbild können die einzelnen Ordnungen anschaulich interpretiert werden. Dazu betrachtet man die entsprechende Fouriertransformierte dieser Entwicklung

$$P_n(\omega) = \chi(\omega; \omega_1, \dots, \omega_n) E(\omega_1) \dots E(\omega_n) . \quad (2.6)$$

Die Frequenz ω bestimmt sich dabei als

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n . \quad (2.7)$$

Diese Fouriertransformierte Polarisierung kann anschaulich als die Streuung von Quasiteilchen untereinander interpretiert werden. Die unterschiedlichen Ordnungen geben dabei an, wieviele Streupartner an einer Streuung beteiligt sind. Da die Wahrscheinlichkeit für einen n Teilchenstoß deutlich größer ist als die Wahrscheinlichkeit für einen $n+1$ Teilchenstoß, konvergiert die Entwicklung (2.4) schnell. Deshalb kann man sich bei der Berechnung der Suszeptibilität häufig auf die ersten nicht verschwindenden Ordnungen beschränken.

Die Ausdrücke für die Suszeptibilität vereinfachen sich, wenn die vorhandenen Symmetrien berücksichtigt werden. Aus der Realitätsbedingung für die Polarisierung folgen die ersten Symmetrien für die Suszeptibilität /Kleinman 62/. Außerdem erfüllen die einzelnen Ordnungen der Suszepti-

bilität dieselben Symmetrien wie das Medium selbst. Dadurch verschwinden beispielsweise alle geraden Ordnungen der Suszeptibilität für die 10 Klassen mit Zentralsymmetrie /Chemla 80, Hey 82/. In der folgenden Tabelle ist eine Auswahl der einzelnen Suszeptibilitäten und deren Bedeutung für die nichtlineare Optik aufgelistet.

1. Passive Prozesse : Realteil von χ

1. Ord.	$\chi_1(\omega_1; \omega_1)$	Lineare Dispersion
2. Ord.	$\chi_2(\omega_3; \omega_1, \omega_2)$	zweite Harmonische Erzeugung
	$\chi_2(\omega_3; \omega_1, 0)$	elektrooptischer Kerreffekt
	$\chi_2(\omega_2; -\omega_3, \omega_1)$	3 Wellen-Mischung
3. Ord.	$\chi_3(\omega_3; -\omega_4, \omega_1, \omega_2)$	4 Wellen-Mischung
	$\chi_3(\omega_1; 0, 0, \omega_1)$	quadratischer Kerreffekt
	$\chi_3(\omega_1; \omega_1, -\omega_1, \omega_1)$	intensitätsabh. Brechungsindex

2. Aktive Prozesse : Imaginärteil von χ

1. Ord.	$\chi_1(\omega_1; \omega_1)$	Lineare Absorption
3. Ord.	$\chi_3(\omega_1; \omega_1, -\omega_1, \omega_1)$	intensitätsabh. Absorption

Abbildung 1. Tabelle einiger nichtlinearer optischer Prozesse

Bei den meisten experimentellen Realisationen der optischen Bistabilität wurde nur ein einfallendes Lichtfeld verwendet. Aus diesem Grund beschränkt sich die weitere Behandlung auf diesen entarteten Fall, in dem alle Frequenzen gleich sind (Einwellenanregung). Dadurch sind die einzelnen Ordnungen der Suszeptibilität nur noch Funktionen der Intensität. Dementsprechend ist auch die dielektrischen Funktion ihrerseits eine Funktion der Intensität.

Diese intensitätsabhängige dielektrische Funktion ist die entscheidende Größe, um optische Bistabilität zu beschreiben. Unter optischer Bistabilität versteht man ein optisches System, das zwei stabile Zustände in der Transmission hat, die beide zu derselben Eingangsintensität gehören. Die transmittierte Intensität als Funktion der Eingangsintensität zeigt in diesem Fall ein Hystereseverhalten. Als Beispiel eines solchen Systems dient im folgenden der mit einem nichtlinearen Medium gefüllte Fabry- Perot- Resonator. Das nichtlineare Medium besitzt eine intensitätsabhängige dielektrische Funktion, die aus einem Real- und einem Imaginärteil besteht. Beide Anteile der dielektrischen Funktion beeinflussen das Feld im Innern des Resonators und können dadurch optische Bistabilität erzeugen. Zunächst möchte ich die einzelnen Elemente, die in ihrem Zusammenspiel optische Bistabilität bedingen, diskutieren.

Das elektrische Eingangsfeld

Idealerweise benutzt man das kohärente Ausgangsfeld eines kontinuierlich betriebenen Lasers als Eingangsfeld des Fabry- Perot- Resonators. Dies bedeutet, man stellt sich ein Feld mit einer festen Frequenz und einer zeitlich konstanten Intensität vor.

Diese Idealisierung erfüllt ein realer Laser nicht. Sein Ausgangsfeld hat eine endliche Linienbreite und seine Intensität schwankt um einen zeitlichen Mittelwert. Diese Fluktuationen lassen sich durch Erweiterung der deterministischen Gleichungen zu stochastischen Langevingleichungen berücksichtigen.

Bedingt durch die Nichtlinearität des Mediums ist die einfallende Intensität nicht mehr proportional zur Intensität im Resonator.

Der Resonator

Als Resonator bezeichnet man eine Anordnung, in der die Intensität am Ende der Anordnung die Eingangsintensität beeinflusst. Bei der optischen Bistabilität wirkt die Resonatorrückkopplung mit der Nichtlinearität des Mediums zusammen. Bedingt durch diese Nichtlinearität erfährt das elektrische Feld während der Propagation durch das Medium eine intensitätsabhängige komplexe Phasenverschiebung. Die aus dem Resonator transmittierte Intensität wird somit zu einer nichtlinearen Funktion des Eingangsfeldes.

Eine Anordnung, die häufig in den Experimenten mit Halbleiterelementen als aktives Medium verwendet wird, ist der Fabry- Perot- Resonator.

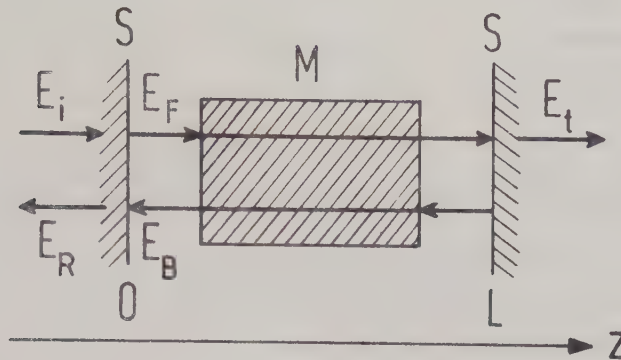


Abbildung 2. Der Fabry- Perot- Resonator schematisch

Dieser ist in Abbildung 2 skizziert und wird nun näher diskutiert. Er besteht aus zwei halbdurchlässigen Spiegeln S, zwischen denen sich das aktive Material M befindet. Die Spiegel werden von den natürlichen oder von den verspiegelten Oberflächen des Kristalls gebildet. Fällt Licht in den Fabry- Perot- Resonator ein, bildet sich sowohl eine vor- (E_F) als auch eine rückwärts (E_B) laufende Welle aus. Beide Wellen interferieren je nach Phasenbedingung konstruktiv oder destruktiv miteinander. Diese Effekte werden im Innern des Resonators durch die folgenden Randbedingungen berücksichtigt /Mc Call 74, Carmichael 80/:

$$\begin{aligned} E_F(z=0,t) &= \sqrt{R} E_B(0,t) + \sqrt{T} E_i(t) \\ E_R(z=0,t) &= -\sqrt{R} E_i(t) + \sqrt{T} E_B(0,t) \\ E_B(z=L,t) &= \sqrt{R} E_F(L,t) \\ E_T &= \sqrt{T} E_F(L,t) . \end{aligned}$$

(2.8)

R, T ist der Reflexions- bzw der Transmissionskoeffizient der beiden Spiegel, während E_T und E_R das transmittierte bzw das reflektierte Lichtfeld ist. Dies bedeutet, die Maxwell'schen Gleichungen (2.1, 2.2) sind unter den obigen Randbedingungen zu lösen. Dies kann häufig nur noch numerisch durchgeführt werden.

Außer dieser rein optischen Resonatoranordnung werden oft noch Resonatoren verwendet, die aus optischen, elektronischen oder akustischen Bauteilen zusammengesetzt sind. Sie besitzen ähnliche Eigenschaften wie die rein optischen Resonatoren.

Die Intensität wird während der Propagation durch das Medium aufgrund der Absorption α des Kristalls abgeschwächt. Ein Maß für die gesamte Abschwächung der Intensität nach Durchlauf durch einen Kristall der Länge L ist die optische Dicke αL . Ist diese klein, vereinfacht sich das Problem, da dann die Intensitäten der vor- und rückwärts laufenden Teilwellen über die Länge des Mediums nahezu konstant sind. Besitzen die Spiegel auch noch einen hohen Reflexionskoeffizienten ($R \approx 1$), dann gleichen sich die Intensitäten der beiden Partialwellen an und man kann das Problem in der von Bonifacio eingeführten "Mean-field"- Näherung behandeln /Bonifacio 78a/. Da der Begriff in der Vielteilchenphysik eine völlig andere Bedeutung hat, ist diese Bezeichnung hier etwas unglücklich, aber in der Theorie der optischen Bistabilität durchaus üblich. In dieser Approximation werden die über die Länge L des Resonators schwach variierenden Felder durch ein gemitteltes, effektives Feld ersetzt, das die Randbedingungen (2.8) erfüllt. Meystre hat diese Näherung für verschiedene optische Dicken und Transmissionskoeffizienten ausführlich diskutiert und numerisch die Bedingung dafür untersucht, für welche Parameter diese Näherung noch sinnvolle Ergebnisse liefert. Er fand, daß die "Mean-field"- Näherung bei einem Reflexionsvermögen von $R \approx 0.9$ ihre Gültigkeit bis zu einer optischen Dicke von $\alpha L \leq 4$ behält /Meystre 78/.

Die Transmission eines Fabry- Perot- Resonators kann leicht berechnet werden, denn das transmittierte Feld wird durch die Summe aller vorwärts laufenden Teilwellen gebildet. Aus dieser Überlegung folgt für verlustfreie Spiegel das transmittierte Feld E_T als /Born 65/

$$E_T = TE_i e^{i\delta} \sum_m (\sqrt{R} e^{i\delta})^{2m} = TE_i e^{i\delta} / (1 - R e^{2i\delta}). \quad (2.9)$$

Der Summationsindex m gibt an, wie oft das Feld schon im Resonator reflektiert wurde ($2m$). δ ist dabei eine komplexe Phasenverschiebung des elektrischen Feldes, die sich nach Durchlauf durch das aktive Material mit der Länge L einstellt. Sie hängt über

$$\delta = \delta_1 + i\delta_2 = L\omega\sqrt{\epsilon}/c \quad (2.10)$$

mit der dielektrischen Funktion ϵ des Mediums zusammen. Aus Gleichung (2.9) erhält man durch Quadratur sofort die bekannte Resonatorformel für die transmittierte Intensität I_T als Funktion der Eingangsintensität I_i

$$I_T = |E_T|^2 = I_i (1-R)^2 / [(e^{\delta_2} - \text{Re } e^{-\delta_2})^2 + 4R \sin^2 \delta_1] . \quad (2.11)$$

$F=4R/T^2$ wird als die Finesse des Resonators bezeichnet. Diese ist ein Maß für den Abstand zweier benachbarter Transmissionsmaxima und der Halbwertsbreite der Verteilung um diese Maxima. Mit wachsendem Reflexionsvermögen werden diese Maxima ausgeprägter.

Das Verhältnis zwischen der transmittierten und der Eingangsintensität wird als die Transmission des Resonators bezeichnet.

Bei verschwindender Absorption ($\delta_2=0$) findet man Maxima der Transmission, wenn die Phasenverschiebung δ_1 ein Vielfaches von π beträgt.

$$\delta_1 = \omega L n / c = N\pi . \quad (2.12)$$

Eine weitere Beziehung für die Transmission findet man durch direkte Summation der vor- und rückwärts laufenden Wellen

$$\tau = I_{\text{int}} T / [I_T (1+R)] . \quad (2.13)$$

Aus den zwei Beziehungen der Transmission erhält man die Phasenbeziehung δ_1 als Funktion der inneren Intensität I_{int} des Resonators. Beide Bedingungen sind in Abbildung 3 aufgetragen.

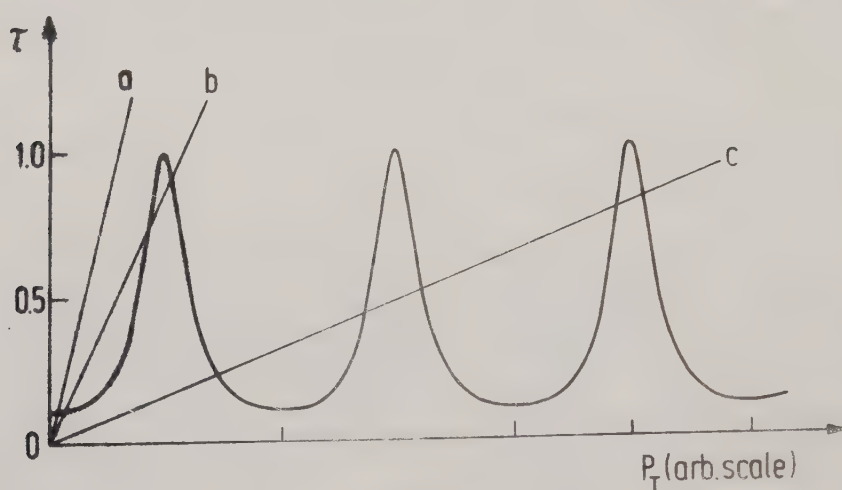


Abbildung 3. Die stationäre Transmission τ des Resonators als Funktion der transmittierten Intensität P_t : Die geraden a, b und c geben die Transmission als Funktion der inneren Intensität des Resonators an /Lugiatio 84/.

Hier ist die Transmission als Funktion der einfallenden Intensität aufgetragen (2.11). Die Geraden a, b und c geben die Transmission als Funktion der inneren Intensität an (2.13). Beide Bedingungen müssen gleichzeitig erfüllt sein. Dies ist gerade an den Schnittpunkten der beiden Kurven der Fall. Diese Schnittpunkte ergeben Punkte auf der Kurve der transmittierten Intensität als Funktion der einfallenden Intensität. Der Fall a stellt dabei einen Bereich mit nur einer Lösung dar (monostabil). Fall b entspricht dem bistabilen Bereich und Fall c kennzeichnet höhere Instabilitäten. Die zu verschiedenen Schnittpunkten gehörende Eingangsintensität ist in Abbildung 4 als Funktion der inneren Intensität aufgetragen.

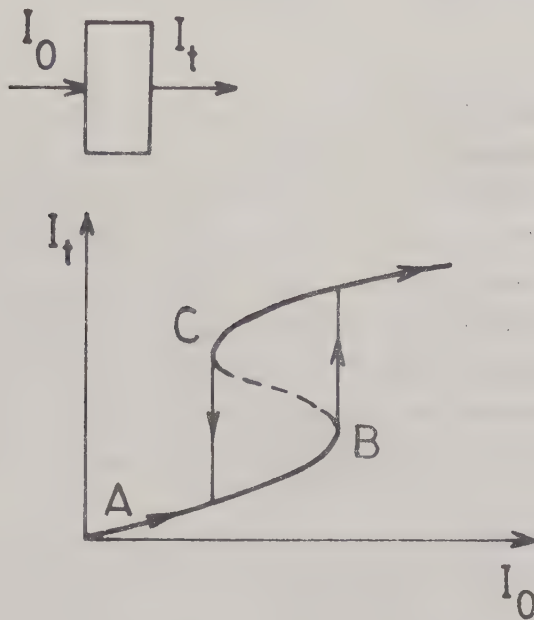


Abbildung 4. Die transmittierte Intensität (I_t) als Funktion der Eingangsintensität (I_0) /Haug 82b/

Die dabei auftretende Hysterese ist typisch für die optische Bistabilität. Aus einer Stabilitätsanalyse der drei Zustände des bistabilen Bereichs findet man, daß der mittlere Ast gegenüber infinitesimal kleinen Fluktuationen instabil ist. In einem realen Experiment kann er deshalb nicht beobachtet werden.

Im Grenzfall einer großen optischen Dicke wird die vorwärts laufende Welle so stark abgeschwächt, daß die rückwärts laufende Welle in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Es genügt, dann den Verlauf der einfallenden Welle zu betrachten.

In einem realen Experiment liegt häufig eine Mischung aus beiden Idealfällen vor.

Faßt man die beiden Ausdrücke für die Transmission eines Resonators (2.11, 2.13) zusammen, ergibt sich die folgende Beziehung

$$I_{\text{int}} = T(1+R)I_1 / [(e^{\delta_2} - \text{Re}^{-\delta_2})^2 + 4R \sin^2 \delta_1] \quad (2.14)$$

zwischen der inneren Intensität I_{int} und der einfallenden Intensität I_1 . Dabei ist die Phasenverschiebung $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ proportional zur dielektrischen Funktion (2.10), die selbst eine Funktion der inneren Intensität ist. Die optische Bistabilität wird im stationären Fall ohne Fluktuationen durch Gleichung (2.14) beschrieben. Wegen der dielektrischen Funktion ist die innere Intensität eine nichtlineare Funktion der einfallenden Intensität. Je nachdem, ob der Real- oder der Imaginärteil der dielektrischen Funktion die dominante Intensitätsabhängigkeit aufweist, spricht man von einer dispersiven ($\delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0$) oder einer absorptiven ($\delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0$) optischen Bistabilität.

Eine grobe Abschätzung für die Dominanz einer der beiden Anteile, wird durch den Vergleich der beiden Summanden des Nenners erhalten :

$$e^{\delta_2} - \text{Re}^{-\delta_2} \approx 2\sqrt{R} \sin(\delta_1) \quad (2.15)$$

Aus dieser Beziehung findet man die Größenordnung der inneren Intensität, bei der eine dispersive in eine absorptive optische Bistabilität übergeht.

Das nichtlineare Medium

Wie die Resonatorbedingung (2.12) zeigt, ist es für das Auftreten der optischen Bistabilität nötig, daß die dielektrische Funktion von der Intensität abhängt. Diese Intensitätsabhängigkeit der dielektrischen Funktion stammt von der Reaktion des Mediums auf das Eingangsfeld. Zu einer vollständigen Beschreibung der optischen Bistabilität stellt man deshalb die Bilanzgleichungen der Polarisierung und aller mit ihr koppelnden Größen (zB. Dichte) auf. Dieses System der gekoppelten Materialgleichungen hängt von dem zugrunde liegenden Modell ab und kann nur für wenige Modelle exakt aufgestellt werden. Für ein einfaches System aus Zwei- Niveau-Atomen ist dies beispielsweise möglich und wird später noch beschrieben

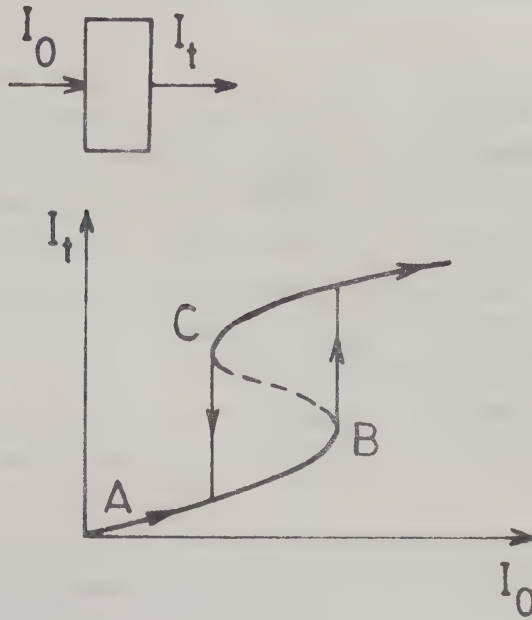


Abbildung 4. Die transmittierte Intensität (I_t) als Funktion der Eingangsintensität (I_0) /Haug 82b/

Die dabei auftretende Hysterese ist typisch für die optische Bistabilität. Aus einer Stabilitätsanalyse der drei Zustände des bistabilen Bereichs findet man, daß der mittlere Ast gegenüber infinitesimal kleinen Fluktuationen instabil ist. In einem realen Experiment kann er deshalb nicht beobachtet werden.

Im Grenzfall einer großen optischen Dicke wird die vorwärts laufende Welle so stark abgeschwächt, daß die rückwärts laufende Welle in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Es genügt, dann den Verlauf der einfallenden Welle zu betrachten.

In einem realen Experiment liegt häufig eine Mischung aus beiden Idealfällen vor.

3.0 DAS SYSTEM AUS N ZWEI-NIVEAU-ATOMEN

Die im letzten Kapitel gegebene kurze Einführung in die optische Bistabilität wird nun anhand eines einfachen Modells vertieft.

Dazu betrachtet man am besten ein System von N identischen Zwei-Niveau-Atomen, die nur über ein klassisches Lichtfeld E miteinander in Wechselwirkung treten können. Quanteneffekte können wegen der betrachteten großen Photonenzahlen des Lichtfeldes vernachlässigt werden. Man spricht dann auch von der semiklassischen Beschreibung der optischen Bistabilität, da die entsprechenden Materialgleichungen noch immer quantenmechanisch berechnet werden.

Der Hamiltonoperator H , der die Wechselwirkung der Atome mit dem Lichtfeld beschreibt, lautet in Dipolnäherung

$$H = H_0 - E \cdot p, \quad (3.1)$$

wobei H_0 das isolierte Zwei-Niveau-System und E das klassische elektrische Feld ist, das über den Dipoloperator p Anregungen in das System induziert /siehe zB. Haken 70/. Da jedes Atom zwei verschiedene Energiezustände besitzt, wirkt der dazugehörige Hamiltonoperator in einem zweidimensionalen Hilbertraum, der durch die Einführung der folgenden Operatoren definiert ist

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Die Dynamik dieses Systems wird durch die Dichtematrix ρ

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

beschrieben /Sargent 74/. Dabei sind E_1 und E_2 die Energien des unteren und des oberen Energieniveaus und μ ist das Matrixelement des Dipolüberganges. Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix ist durch die quantenmechanische Liouville-Gleichung

$$i\partial_t \rho = [H, \rho] \quad (3.4)$$

gegeben. Wertet man den Kommutator explizit aus, findet man

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{11} &= -\gamma_{\downarrow} \rho_{11} + \gamma_{\uparrow} \rho_{22} - i\mu \cdot E (\rho_{12} - k.k.) \\ \partial_t \rho_{12} &= -(i\Omega + \gamma_1) \rho_{12} - i\mu \cdot E (\rho_{11} - \rho_{22}) \\ \partial_t \rho_{22} &= \gamma_{\downarrow} \rho_{11} - \gamma_{\uparrow} \rho_{22} + i\mu \cdot E (\rho_{12} + k.k.) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ω ist die Frequenz des atomaren Systems, $\gamma_{\downarrow}$ und $\gamma_{\uparrow}$ sind die Zerfallsraten des oberen und des unteren Zustandes. Die atomare Dipolzerfallsrate $\gamma_1 = \frac{1}{2}\gamma_2 + \gamma_{ph}$ besitzt einen strahlenden Beitrag $\gamma_2 = \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow}$ und einen Anteil γ_{ph} für die phasenerstörenden Prozesse, wie zB. elastische Stöße. Führt man nun die Polarisation P und die Inversion D durch

$$P = \mu (\rho_{12} e^{-i(kz - \Omega t)} + k.k.)$$

und

$$D = \rho_{11} - \rho_{22} \quad (3.6)$$

ein, erhält man aus (3.5) für die beiden Größen die folgenden Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t^2 P + 2\gamma_1 \partial_t P + \Omega^2 P &= 2\omega_0 \mu^2 E \cdot D \\ \partial_t D &= \gamma_2 (D_0 - D) - 2E \cdot P / \Omega, \end{aligned} \quad (3.7)$$

die die Kopplung des Lichtfeldes an das Medium beschreiben. Die atomare Resonanzfrequenz $\Omega = \omega_0 + \Delta\omega$ hängt über die atomare Verstimmung $\Delta\omega$ mit der Eigenfrequenz ω_0 des Resonators zusammen. Aus der stationären Lösung des feldfreien Resonators bestimmt sich D_0 zu $D_0 = (\gamma_{\uparrow} - \gamma_{\downarrow}) \gamma_2^{-1} N$.

Diese Materialgleichungen bezeichnet man zusammen mit den Maxwellgleichungen (2.1) auch als Maxwell- Bloch- Gleichungen. Sie beschreiben die Ausbreitung eines Feldes in einem System von N Zwei- Niveau- Atomen.

Diese Bilanzgleichungen werden in der Literatur häufig nicht direkt, sondern nur in der Näherung langsam variierender Amplituden (SVAA) gelöst

$$(E, P) = (E', P') e^{i(kz - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (3.8)$$

Die vollen Bewegungsgleichungen können unter Umständen für hohe Intensitäten chaotisches Verhalten zeigen, während sich die entsprechenden Bewegungsgleichungen der langsam veränderlichen Amplituden regulär verhalten /Milloni 83, Munz 83/. Zusätzlich können die Gleichungen aber auch in dieser Näherung chaotische Lösungen besitzen /Lugiatio 82/.

Mit der Näherung langsam variierender Amplituden erhält man zusammen mit der Dispersionsrelation des leeren Resonators $k = \omega_0/c$ und der Skalierung $P' = i\mu \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma_2/\gamma_1)} D_0 P$, $E' = \sqrt{(\gamma_1 \gamma_2)} E / (2\mu)$, $D = D_0 D$ und $(\omega_a - \omega_0)/\gamma_1 = \Delta$ aus den Bilanzgleichungen (3.7) die reduzierten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t E + c \partial_z E &= -\alpha c P \\ \gamma_1^{-1} \partial_t P &= -(1 + i\Delta) P + ED \\ \gamma_2^{-1} \partial_t D &= -\frac{1}{2}(EP^* + E^*P) - D + 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die atomare Absorption α ist dabei durch $\alpha = 4\pi\omega_0\mu^2 D_0/\gamma_1$ gegeben. Bei der Herleitung wurde weiterhin angenommen, daß die Frequenz $\omega = \omega_0 + \theta$ des elektrischen Feldes gegen die Resonatorfrequenz ω_0 verstimmt ist.

Nun wird für diese Gleichungen noch der Einfluß des Fabry- Perot- Resonators berücksichtigt. Dazu zerlegt man das Feld in einen Anteil für die vorwärts und einen Anteil für die rückwärts laufende Welle und berücksichtigt die Resonatorbedingungen (2.8). In "Mean-field"- Näherung (vgl. Kapitel 2) erhält man

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} \partial_t E &= -(E - \varepsilon) + i\theta E - 2CP \\ \gamma_1^{-1} \partial_t P &= -(1 + i\Delta) P + ED \\ \gamma_2^{-1} \partial_t D &= -D + 1 - \frac{1}{2}(EP^* + E^*P) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\kappa = cT/L$ ist die inverse Relaxationszeit des elektrischen Feldes, während die Kopplung zwischen den Atomen und dem Lichtfeld durch den Kooperationsparameter $C = aL/2T$ beschrieben wird. $\epsilon = E_i/\sqrt{T}$ ist dabei das skalierte, einfallende elektrische Feld.

Durch diese Gleichungen werden viele nichtlineare optische Effekte beschrieben. Für eine spezielle Wahl der Parameter zeigen diese Gleichungen beispielsweise auch deterministisches Chaos, das in diesen Systemen hauptsächlich von Lugiato et al. untersucht wurde /zB. Lugiato 82,84/.

Um die Komplexität des Problems zu reduzieren, wird im weiteren nur der Grenzfall betrachtet, daß sich die atomaren Variablen zeitlich viel schneller ändern als das elektrische Feld ($\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$, "good cavity"- Fall). Die Materialvariablen (P,D) können deshalb adiabatisch eliminiert werden. Anschaulich gesprochen, "versklavt" das elektrische Feld in diesem Grenzfall die Materialvariablen /Haken 77/. Eliminiert man die Materialvariablen, findet man aus den Gleichungen (3.10) eine effektive Bewegungsgleichung für das elektrische Feld E

$$\kappa^{-1} \partial_t E = \epsilon - E[(1-i\Delta) + \chi(|E|^2)] . \quad (3.11)$$

Die darin vorkommende nichtlineare Suszeptibilität χ ist durch

$$\chi = 2C(1-i\Delta)/(1+\Delta^2+|E|^2)$$

gegeben. Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß das Feld im Innern des Resonators (E) im allgemeinen verschieden vom Eingangsfeld ϵ ist, da das innere Feld durch die kooperative Wechselwirkung der Atome beeinflusst wird.

Im folgenden wird zunächst ein einfacher Spezialfall der allgemeinen Bewegungsgleichung (3.11) diskutiert. Dazu werden alle dispersiven Effekte vernachlässigt ($\Delta = 0$). Für diesen reinen absorptiven Fall bekommt man die stationäre Lösung ($\partial_t E = 0$) :

$$\epsilon = E(1 + 2C/(1+|E|^2)) . \quad (3.12)$$

Für sehr große Felder wird der nichtlineare Anteil vernachlässigbar klein und es gilt wieder die Beziehung des leeren Resonators $\epsilon = E$. Das atomare System ist gesättigt und der Absorber ausgebleicht. In dieser Situation

wechselwirkt jedes Atom unabhängig von den anderen Atomen mit dem Lichtfeld. Für kleine Felder findet auch ein lineares Verhalten $\varepsilon=(1+2C)E$ statt, das allerdings vollständig vom kooperativen Verhalten der Atome bestimmt wird.

Die vollständige Kurve $\varepsilon(E)$ verhält sich für verschiedene C analog zu der van der Waals Kurve eines Flüssigkeits- Dampf- Phasenübergangs, wobei ε, E und C im optischen System die Rolle von Druck, Volumen und Temperatur des thermischen Systems bilden. Dieses Verhalten ist in Abbildung 5 dargestellt.

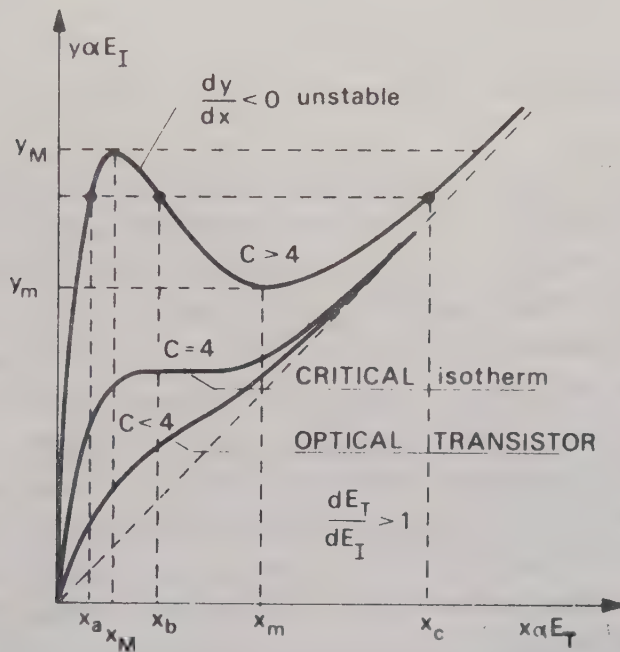


Abbildung 5. Stationäre Lösung der Bewegungsgleichung (3.11) einer absorptiven optischen Bistabilität für verschiedene Werte von C /Lugiatio 84/

Solange der Kooperationsparameter C kleiner als 4 ist, findet man für alle Eingangsfelder nur eine reelle Lösung. In einigen Fällen ist die differentielle Verstärkung dE_T/dE_I schon größer als 1. Dies ermöglicht

die Konstruktion eines optischen Transistors. Für $C=4$ besitzt die Kurve erstmalig eine waagerechte Tangente und entwickelt für größere Kooperationsparameter Extrema, die umso ausgeprägter werden, je größer C ist.

Nach der Behandlung des absorptiven Falls werden nun allgemeine Bedingungen für das Auftreten von optischer Bistabilität aufgestellt. Aus der notwendigen Bedingung für das Vorhandensein von Transmissionsmaxima ($d^2\tau/d|E|^2=0$) erhält man eine kubische Gleichung für die Extrema. Da die resultierenden Intensitäten auch positiv und reell sein müssen, bekommt man für $\Delta\theta>0$ die beiden Ungleichungen /Bonifacio 79/

$$2C>\Delta\theta-1$$

$$(2C-\Delta\theta+1)^2(C+4\Delta\theta-4)\geq 27C(\Delta\theta) .$$

(3.13)

Aus ihnen folgt für den rein absorptiven Fall das schon bekannte Ergebnis $C\geq 4$.

Die Mechanismen für das Zustandekommen bistabilen Verhaltens können im absorptiven und im dispersiven Fall folgendermaßen verstanden werden.

Im reinen absorptiven Fall ist die Transmission in der kooperativen Phase ($E\neq 0$) klein, da die hohe Absorption die Intensität im Medium stark reduziert. Mit anwachsendem Eingangsfeld beginnt die Absorption sich zu sättigen. Das Medium bleicht aus und das innere Feld steigt wegen der kleineren Absorption an. Der Resonator befindet sich nun in einem Zustand hoher Transmission. Wird das Eingangsfeld wieder verkleinert, ist das innere Feld noch immer stark genug, die Sättigung der Absorption aufrecht zu erhalten. Deshalb springt die Transmission erst bei einer niedrigeren Intensität wieder auf den Zustand hoher Absorption. Durch dieses Verhalten wird eine Hysterese erzeugt.

Die reine dispersive optische Bistabilität beruht auf einem anderen Mechanismus. Das einfallende Lichtfeld erfährt bei Durchlaufen des Mediums keine Reduzierung der Amplitude, sondern nur eine Phasenverschiebung. Dadurch bilden sich im Fabry-Perot-Resonator eine vorwärts und eine rückwärts laufende Partialwelle aus. Je nach Phasenbedingung interferieren diese Partialwellen entweder konstruktiv oder destruktiv miteinander. Ist das einfallende Feld gegen die Resonatoreigenfrequenz verstimmt, findet destruktive Interferenz statt und es liegt ein Zustand niedriger Transmission vor. Mit wachsendem Eingangsfeld ändert der nichtlineare Brechungsindex die effektive optische Länge des Resonators

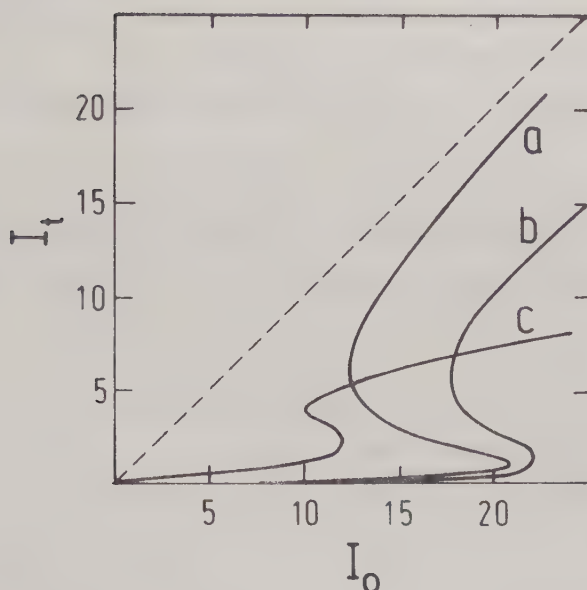


Abbildung 6. Transmittierte Intensität gegen die einfallende Intensität:

a) $\Delta=0=0$, b) $\Delta=1$, $\theta=-1$, c) $\Delta=3$, $\theta=4$ /Agrawal 79/

und verringert dadurch dessen Verstimmung. Dieser Effekt bewirkt ein Anwachsen der Transmission, da nun eine konstruktive Interferenz vorliegt. Bei einer Reduktion des Eingangsfeldes ist das innere Feld des Resonators noch immer stark genug, die Resonanzbedingung aufrecht zu erhalten. Wieder entsteht eine Hysterese.

Im allgemeinen Fall der gemischten absorptiven und dispersiven Bistabilität wird das Verhalten komplizierter. Die größte Hysterese findet man im absorptiven Grenzfall. Sind die Verstimmungsparameter ungleich Null, sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt die Frequenz des elektrischen Feldes unterhalb der Resonatorfrequenz ($\theta < 0$), dann ist die kritische Sprungintensität für den Übergang in den Zustand hoher Transmission kleiner als der entsprechende Wert für eine reine absorptive optische Bistabilität. Man beobachtet die dispersive optische Bistabilität. Bei positiver Verstimmung ($\theta > 0$) liegt die Sprungintensität oberhalb des entsprechenden absorptiven Wertes. Man würde experimentell eine absorptive Bistabilität finden. Dieses Verhalten kehrt sich jedoch um,

wenn die inhomogene Verbreiterung der atomaren Übergänge berücksichtigt wird. In diesem Fall liegen beide dispersiven Sprungintensitäten unterhalb des entsprechenden absorptiven Wertes.

In einem realen Kristall sind die atomaren Übergänge immer verbreitert. Solange die dispersiven Änderungen ausreichend sind, um Bistabilität zu erzeugen, findet man immer eine dispersive Bistabilität. Die absorptive Bistabilität kann nur dann beobachtet werden, wenn die dielektrische Funktion hinreichend kleine disperse und große absorptive Änderungen hat.

Bisher wurde ausschließlich das stationäre Verhalten der optischen Bistabilität behandelt. Diese Diskussion wird nun auf dynamische Prozesse erweitert. Die Gleichung für die zeitliche Entwicklung des elektrischen Feldes (3.11) lautet

$$\kappa^{-1} \partial_t E = \epsilon - E - 2CE / (1 + |E|^2) . \quad (3.14)$$

Die Einführung von Polarkoordinaten $E = r \cos(\phi)$ führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} \partial_t r &= -\partial_r \Psi \\ \kappa^{-1} \partial_t \phi &= -r^{-2} \partial_\phi \Psi , \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei das Potential

$$\Psi(r, \phi) = \frac{1}{2} [r^2 + \epsilon^2 - 2r\epsilon \cos(\phi) + 2C \ln(1 + r^2)] \quad (3.16)$$

ist. Diese Gleichungen entsprechen den kinetischen Gleichungen eines überdämpften Teilchens.

Die Dynamik der vollen, absorptiven Maxwell- Bloch- Gleichungen wurden von Erneux und Mandel im Grenzfall großer Kooperationsparameter analytisch untersucht /Erneux 83/. Sie fanden, daß auf den beiden Zweigen der Transmission verschiedene Variablen dominieren. Im Zustand niedriger Transmission (Dichte) beherrscht die Inversion D das Verhalten des Systems, während im Zustand hoher Transmission diese Rolle vom elektrischen Feld übernommen wird. Dabei fanden sie in niedrigster Ordnung des Koope-

rationsparameters C, daß die jeweils dominierende Variable sich monoton verhält, während die beiden anderen Variablen auf einer kleineren Zeitskala oszillieren. Dieses Verhalten der herrschenden Variablen verändert sich während des Sprunges zwischen den beiden Zuständen.

Schon früher wurde in diesem Kapitel erwähnt, daß sich die optische Bistabilität als ein Nichtgleichgewichtsphasenübergang erster Ordnung beschreiben läßt. Aus der Theorie der Phasenübergänge ist bekannt, daß Fluktuationen im Koexistenzgebiet der beiden Zustände eine wichtige Rolle spielen. Im weiteren sollen deshalb die Einflüsse von Fluktuationen auf das elektrische Feld untersucht werden. Im einfachsten Fall addiert man zur deterministischen Bilanzgleichung des elektrischen Feldes (3.11) eine Gauß- Markov Fluktuation ξ , die beispielsweise ein verrauschtes Eingangsfeld beschreiben soll. Nach der Umskalierung $\kappa t \rightarrow t$, $E/\sqrt{1+\Delta^2} \rightarrow E$, $\varepsilon/\sqrt{1+\Delta^2} \rightarrow \varepsilon$ und $2C/(1+\Delta^2) = \Gamma^2$ findet man die stochastische Bewegungsgleichung

$$\partial_t E = \varepsilon - E[(1+i0) + \Gamma^2(1-i\Delta)/(1+|E|^2)] + \xi(t) \quad (3.17)$$

Die Gauß- Markov- Fluktuation ξ ist durch

$$\langle \xi \rangle = \langle \xi \xi \rangle = \langle \xi^* \xi^* \rangle = 0$$

und

$$\langle \xi^*(t+\tau) \xi(t) \rangle = 2Q\delta(\tau)$$

definiert. Die analytische Behandlung von Langevingleichungen ist oft nicht praktikabel. Deshalb wird sie auf die stochastisch äquivalente Fokker- Planck- Gleichung des elektrischen Feldes abgebildet (vergleiche Anhang A).

$$\begin{aligned} \partial_t f = & \partial_x [x - 0y + \Gamma^2(x - \Delta y)/(1+x^2+y^2) - \varepsilon] f \\ & + \partial_y [y + 0x + \Gamma^2(y + \Delta x)/(1+x^2+y^2)] f \\ & + \partial_x^2 f + \partial_y^2 f \end{aligned} \quad (3.18)$$

Diese partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte f wird zunächst stationär gelöst. Dazu schreibt man die Fokker-Planck-Gleichung in Form einer Kontinuitätsgleichung um

$$\partial_t f = -\operatorname{div} J.$$

Immer wenn der Nettostrom zwischen den beiden Zuständen der Transmission verschwindet, liegt eine stationäre Lösung vor. Man spricht dann auch von einem detailliertem Gleichgewicht. Bei Zeitumkehr (vgl. Anhang A) muß der irreversible Anteil des Stromes aus Symmetriegründen verschwinden, während der reversible Anteil einen endlichen Wert behält, da nach der Kontinuitätsgleichung nur seine Divergenz verschwinden muß. Setzt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung als

$$f_{st} = N e^{-\Psi/Q} \quad (3.19)$$

an, findet man ein System von gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen für das Potential (A.17). In dem hier diskutierten Fall der optischen Bistabilität hat dieses Potential innerhalb des bistabilen Bereiches zwei Minima, durch die die beiden stabilen Zustände des Systems bestimmt sind. Dabei charakterisiert das absolute Minimum den wahrscheinlichsten Zustand des Systems, während das andere, lokale Minimum zu einem metastabilen Zustand gehört, dessen Zerfallszeit durch die Potentialbarriere zwischen den beiden Minima bestimmt ist. Mit dem sich ändernden Eingangsfeld variieren auch die Tiefen der Minima. Sind die beiden Minima gleich tief, wird die Stabilität zwischen den beiden Zweigen der Transmission ausgetauscht. Dieses Kriterium bildet die Verallgemeinerung der Maxwellkonstruktion für Nichtgleichgewichtssysteme /Graham 81/. Sie ist durch die gestrichelten Linie in Abbildung 7 dargestellt.

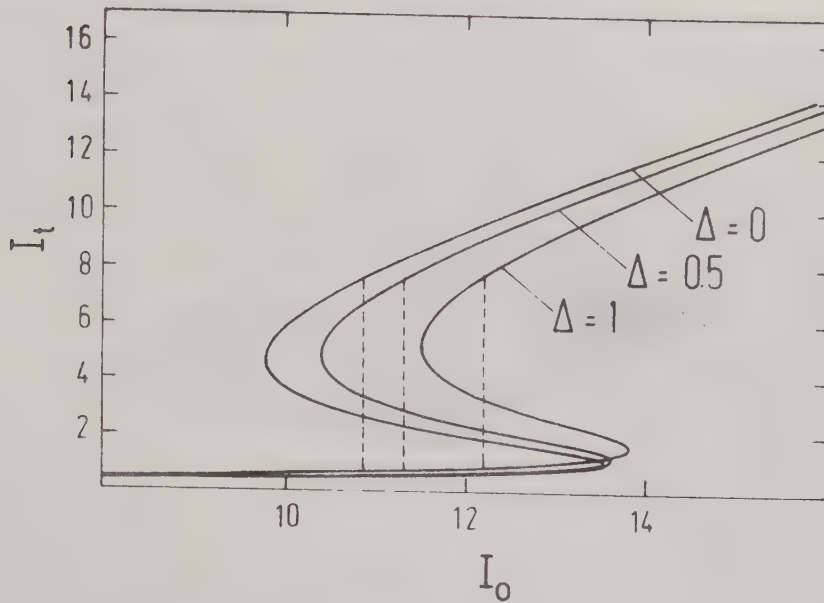


Abbildung 7. Die verallgemeinerte Maxwellkonstruktion:

Die gestrichelten Linien wurden durch die gleiche Höhe der beiden Extrema des Potentials bestimmt und in die stationäre Lösung von Gleichung (3.13) eingetragen /Graham 81/.

Im rein absorptiven Fall kann das Potential analytisch berechnet werden. Es ist durch

$$\Psi = \frac{1}{2} [(x-\varepsilon)^2 + y^2 + \Gamma^2 \ln(1+x^2+y^2)] \quad (3.20)$$

gegeben /Schenzle 78/. Die dazugehörige Verteilungsfunktion ist in Abbildung 8 für den absorptiven Fall aufgetragen.

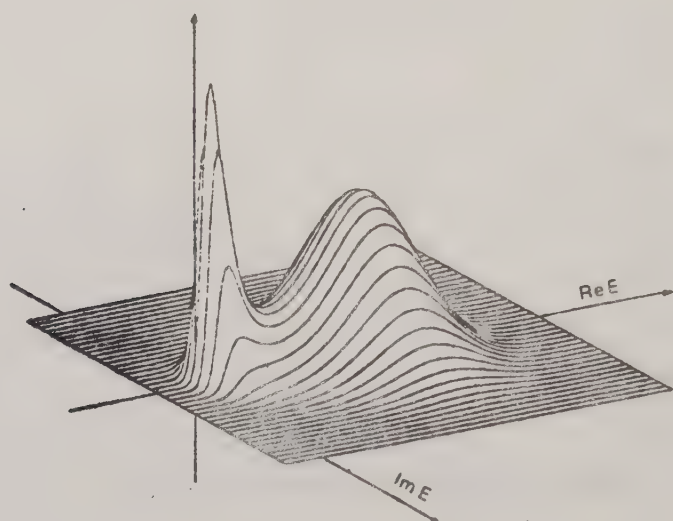


Abbildung 8. Stationäre Verteilungsfunktion für den absorptiven Fall
/Schenzle 78/

Ein weiterer Fall von detailliertem Gleichgewicht liegt vor, wenn das äußere Feld verschwindet. Die Lösung läßt sich leicht als

$$\Psi = \frac{1}{2} [x^2 + y^2 + \Gamma^2 \ln(1 + x^2 + y^2)] \quad (3.21)$$

angeben. Komplizierter wird es, eine Lösung der stationären Fokker-Planck-Gleichung abzuleiten, wenn kein detailliertes Gleichgewicht vorliegt. In diesem Fall sind bisher keine allgemein gültigen, analytischen Konstruktionsprinzipien bekannt.

Für $\Delta=0$ findet man das folgende Potential

$$\Psi = \frac{1}{2} [(x - E_0)^2 + (y + \Delta E_0)^2 + \Gamma^2 \ln(1 + x^2 + y^2)] \quad (3.22)$$

mit $E_0 = \epsilon / (1 + \Delta^2)$.

Dies sind die einzigen Spezialfälle, die soweit bekannt, exakt gelöst werden können.

Exakte analytische Lösungen des entsprechenden zeitabhängigen Problems sind bisher nicht bekannt. Es wurden aber verschiedene analytische und numerische Methoden auf die rein absorptive Bistabilität angewendet.

Dazu wurden die vollständigen Maxwell- Bloch- Gleichungen auf eine effektive Bewegungsgleichung für das elektrische Feld transformiert. Diese Gleichung hat Zardecki unter dem Einfluß von Fluktuationen direkt aufintegriert /Zardecki 80,81/. Mit dieser numerischen Methode untersuchte er, wie die Schaltdynamik durch Rauschen modifiziert wird. Schenzle und Brand haben einen anderen Weg gewählt, um dieses Problem anzugehen /Schenzle 79/. Sie hermitisierten den Fokker- Planck- Operator mit Hilfe der stationären Lösung

$$L_h = e^{\Psi/2} L_{FP} e^{-\Psi/2} \quad (3.23)$$

und wendeten verschiedene aus der Quantenmechanik bekannten Näherungsmethoden auf diesen Operator an. In dem speziellen Fall entwickelten Schenzle und Brand die Wahrscheinlichkeitsdichte f nach Eigenfunktionen des hermiteschen Operators L_h . Zur Bestimmung der Dynamik der Bistabilität wurde ein Variationsprinzip für die Eigenwerte dieser Entwicklung aufgestellt und die ersten nichtverschwindenden Eigenwerte für die beiden Zweige der Transmission berechnet. Daraus konnte die aus der verallgemeinerten Maxwellkonstruktion hergeleitete Stabilität der beiden Zustände näher quantifiziert werden. Sie fanden, daß ein Zustand am vorderen Ende des oberen Astes viel stabiler als das hintere Ende des unteren Zustandes ist.

4.0 OPTISCHE BISTABILITÄT IN HALBLEITERN

Anhand eines einfachen Systems von N Zwei-Niveau-Atomen wurden im letzten Kapitel viele der im Zusammenhang mit der optischen Bistabilität auftretenden Effekte diskutiert. Die entsprechenden Materialgleichungen wurden mit Hilfe der Dichtematrix aufgestellt und in verschiedenen Näherungen behandelt.

Um diese Effekte in einem Halbleiter beschreiben zu können, werden oft kompliziertere Methoden verwendet, da ein abgeschlossenes System von Materialgleichungen wegen der auftretenden Vielteilcheneffekte nicht aufgestellt werden kann. In der Behandlung der Materialeigenschaften geht man dann einen anderen Weg und leitet ein Gleichungssystem für die Greensfunktionen des Systems her. Diese Greensfunktionen koppeln über die Selbstenergie an höhere Korrelationsfunktionen an. Mit Hilfe verschiedener Näherungsverfahren werden diese höheren Korrelationsfunktionen wieder auf die Greensfunktionen reduziert /Mahan 81/.

Die durch die Erzeugung von Elektron-Loch-Paaren im Kristall induzierte Polarisation wird durch eine Zweiteilchengreensfunktion beschrieben. Diese Polarisation ist im allgemeinen dichteabhängig. Einer der Gründe dafür ist, daß Vielteilcheneffekte bei hinreichend hohen Ladungsträgerdichten zu einer dichteabhängigen Renormierung der Einteilchenenergien führen. Diese kann als eine Verschiebung der Anregungsenergie und als endliche Lebensdauer des Quasiteilchens verstanden werden. Außerdem wird die Wechselwirkung zwischen den optisch erzeugten Elektron-Loch-Paaren direkt durch Abschirmungseffekte verändert. Die feldtheoretischen Beschreibungen des Kristalls mit Hilfe von Greensfunktionstechniken wurden in zwei Übersichtsartikeln dargestellt /zB Haug 82b,84/. Eine vielteilchentheoretisch berechnete Polarisationsfunktion ist somit auch eine Funktion der Ladungsträgerdichte, die als eine Funktion der inneren Intensität des Resonators dargestellt werden kann. Da die innere Intensität eine nichtlineare Funktion des Eingangsfeldes ist, findet man im Kristall normalerweise eine Hysterese zwischen der Dichte der angeregten Ladungsträger und der Eingangsintensität. Nun ist nur noch die innere Intensität mit der Dichte zu verknüpfen. Eine Möglichkeit diese Verknüpfung zu bestimmen, liefert das Konzept der Energiegeschwindigkeit. Breitet sich ein Puls bei Anwesenheit einer Absorption aus, verändert sich dadurch seine Form. Dies kann durch eine renormierte Geschwindigkeit beschrieben

werden. /Brillouin 60, Ginzburg 61, Loudon 70, Maddox 75, Puri 80/. Dieses Konzept liefert eine Transportgleichung für die Intensität.

Im weiteren werden kurz die wichtigsten Nichtlinearitäten zusammengestellt, die für die optische Bistabilität in einem Halbleiter verantwortlich sein können.

Dazu betrachte ich ein einfaches Zweibandmodell für einen Halbleiter. Im Grundzustand ist das Valenzband vollständig gefüllt und das Leitungsband leer. Beide Bänder sind durch eine Lücke getrennt. Elektronische Anregungen finden nur durch die Absorption von Photonen statt, deren Energie größer als die Lückenenergie ist. Bei niedrigen Eingangsintensitäten werden nur wenige Elektronen angeregt. Diese treten in Wechselwirkung mit ihrem im Valenzband zurückgelassenen Defektelektronen und bilden unter Umständen dem Wasserstoffatom ähnliche gebundene Zustände, sogenannte Exzitonen. Diese Exzitonen sind die wichtigsten Einteilchenanregungen in einem intrinsischen Halbleiter. Dabei ist natürlich zu berücksichtigen, daß die Lochmasse des Exzitons im Gegensatz zu einem Wasserstoffatom in der Größenordnung der Masse des Elektrons liegt.

Ähnlich wie zwei Wasserstoffatome ein Molekül bilden können, bildet sich unter Umständen auch aus zwei Exzitonen ein Biexziton. Die Anregungsenergie dieses Prozesses ist durch die zweifache Exzitonenenergie abzüglich der Bindungsenergie des Biexzitons gegeben. Die Erzeugung der Biexzitonen führt bei der halben Biexzitonenenergie zu einer Renormierung der dielektrischen Funktion und ist prinzipiell in allen Halbleitern möglich. In der Praxis zeigt sich jedoch, daß in vielen Halbleitern das Biexziton zu stark gedämpft ist, um noch experimentell beobachtet werden zu können. Die Erzeugung von Biexzitonen durch die Zweiphotonenabsorption renormiert die optischen Spektren. Dieser Effekt wurde experimentell in verschiedenen Halbleitern mit großen Lücken beobachtet (CuCl /Itoh 78/, CdS /Kurtze 80/). Er kann, wie von Koch und Haug /Koch 81/ und unabhängig von Hanamura /Hanamura 81/ vorhergesagt, zu einer dispersiven optischen Bistabilität in CuCl führen. Anschließend wurden diese Vorhersagen experimentell von Levy et al. und von Peyghambarian et al. bestätigt /Levy 83, Peyghambarian 83/.

Erhöht man die Intensität, wird auch die Dichte der Exzitonen größer. Gleichzeitig ist mit der Zunahme der Dichte eine Polarisierung des Exzitons verbunden. Diese schirmt nun durch einen Vielteilchenprozess die attraktive Coulombwechselwirkung ab und das Exziton ionisiert deshalb bei einer kritischen Dichte. Diesen Übergang von einem gebundenen zu einem ungebun-

denen e-h Paar bezeichnet man auch als Mottübergang. Dieser Effekt ist wieder in verschiedenen Kristallen unterschiedlich stark ausgeprägt und kann beispielsweise besonders gut in GaAs beobachtet werden, wo er ebenfalls zu einer dispersiven Bistabilität führt /Gibbs 79/.

Die nun vorhandenen freien Ladungsträger bilden ein Plasma, mit dem verschiedene optische Effekte verknüpft sind. Durch Austausch- und Korrelationseffekte wird beispielsweise die Bandkante des Halbleiters abgesenkt. Dieser Effekt ist die Ursache für eine induzierte Absorption, die zu einer absorptiven optischen Bistabilität führen kann. Diese wurde in CdS beobachtet /Rossmann 83, Bohnert 83/. Interessant an dieser Art der optischen Bistabilität ist, daß sie intrinsisch ist, also keiner externen Rückkopplung in einem Resonator bedarf.

Da die Intrabandstreuung auf einer kleineren Zeitskala abläuft als die Interbandstreuung, relaxieren die Ladungsträger zuerst in den einzelnen Bänder und füllen diese parallel zur Absenkung der Bandkante auf. Diese Bandauffüllung führt zu einer dispersiven Bistabilität, die beispielsweise in InSb von Miller et al beobachtet wurde /Miller 79/.

All diese Effekte sind zwar grundsätzlich in allen Kristallen vorhanden, doch sorgen die einzelnen Materialparameter dafür, daß diese Effekte unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Sie können jeweils besonders gut in einzelnen Kristallen untersucht werden.

Bei den gerade erwähnten Prozessen ist die dielektrische Funktion eine Funktion der Ladungsträgerdichte, die deshalb die Dynamik der optischen Bistabilität wesentlich beeinflusst /Miller 81/. Hierfür kann man drei charakteristische Zeitskalen unterscheiden :

Die längste Zeitskala wird durch die Lebensdauer der elektronischen Anregungen bestimmt (Interbandstreuprozesse).

Das mittlere Regime wird durch die typischen Steuzeiten der Intrabandprozesse regiert. Dies ist die Zeit, in der die Ladungsträger in den einzelnen Bändern thermalisieren. Arbeitet man mit Pulsen, die in diesem Zeitregime liegen, werden Nichtgleichgewichtsmethoden notwendig.

Die unterste Ebene in der Hierarchie der Zeitskalen wird durch die Prozesse geregelt, die die Phasenkoherenz des elektrischen Feldes

zerstören. Es ist bis heute nicht möglich, Pulse auf dieser Zeitskala zu erzeugen.

Verschiedene mikroskopische Prozesse bewirken eine dichteabhängige Renormierung der dielektrischen Funktion und lassen dadurch diese mit der Intensität variieren. Sowohl der Brechungsindex als auch die Absorption sind dann Funktionen der Intensität. Diese Nichtlinearität ermöglicht das Auftreten von optischer Bistabilität, die analog zum Kapitel 3 nach der Variation der Dispersion und der Absorption in dem betrachteten Frequenzbereich klassifiziert werden.

In der im weiteren vorgestellten theoretischen Beschreibung der optischen Bistabilität in einem Halbleiter stellt man zwei gekoppelte Transportgleichungen für das komplexe elektrische Feld und die Dichte der angeregten Ladungsträger auf. Relaxieren die beiden Prozesse auf verschiedenen Zeitskalen, kann der schnellere Prozess adiabatisch eliminiert werden. Dabei werden zwei Grenzfälle unterschieden :

Die Dynamik der Bistabilität wird nur durch das zeitliche Verhalten des Eingangsfeldes bestimmt. In diesem Fall ändert sich die Dichte viel schneller als das elektrische Feld.

Dominiert hingegen das dynamische Verhalten der Dichte, hat die Dynamik der optischen Bistabilität nichts mehr mit dem zeitlichen Verhalten des Eingangsfeldes zu tun.

4.1 DISPERSIVE OPTISCHE BISTABILITÄT

Optische Bistabilität kann in einem Halbleiter nur entstehen, wenn die dielektrische Funktion mit der einfallenden Intensität variiert. Hinreichend große Änderungen der dielektrischen Funktion, die zur Ausbildung einer optischen Bistabilität führen, entstehen u.a. bei der Bildung von Biexzitonen durch Zweiphotonenabsorption. Dieser Prozess wird nun exemplarisch für einen CuCl-Kristall untersucht.

Bestrahlt man ein dünnes CuCl-Plättchen mit einem intensiven Lichtfeld, dessen Energie ungefähr der halben Biexzitonenenergie entspricht, kann ein Exziton virtuell angeregt werden. Dieses virtuelle Exziton erzeugt mit einem zweiten absorbierten Photon ein Exzitonenmolekül.

Solange diese Absorption nicht sättigt, ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein eines zweiten Photons proportional zur Anzahl der Photonen und damit zur Intensität im Kristall. Diese absorptiven Änderungen sind über eine Kramers- Kronig- Transformation mit dispersiven Änderungen verknüpft und führen zu einer Renormierung der dielektrischen Funktion. Dieser Effekt wurde in einer Reihe von Arbeiten sowohl experimentell (CuCl /Itoh 78/, CdS /Kurtze 80/) als auch theoretisch (/März 80, Schmitt-Rink 81, Bigot 84/) unabhängig untersucht. Man findet eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

Um diesen Effekt in einem optischen Schaltelement verwenden zu können, wären schnelle Schaltzeiten wichtig. Diese werden durch die Lebensdauer der angeregten Zustände (Biexzitonen) wesentlich bestimmt. Regt man die Biexzitonen aber nur virtuell an, können sie wesentlich schneller als mit ihrer natürlichen Lebensdauer zerfallen. Dies führt zu Schaltzeiten im ps Bereich /Hanamura 81/.

Die dielektrische Funktion

Die transversalen Eigenmoden einer elektromagnetischen Welle in einem Medium sind Lösungen der Dispersionsrelation

$$\omega^2 \epsilon(\omega) = k^2 c^2. \quad (4.1)$$

Sind keine freien Ladungsträger angeregt, wird die dielektrische Funktion vollständig durch die Greensche Funktion des Exzitons

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty - |g|^2 D_x(k, \omega) \quad (4.2)$$

mit dem Matrixelement

$$|g|^2 = \frac{1}{2} (\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \omega_x.$$

bestimmt /Hopfield 58/. ϵ_0 und ϵ_∞ sind dabei die statische und die hochfrequente dielektrische Konstante und ω_x ist die Exzitonenfrequenz. Die Greensche Funktion des Exzitons D_x ist als Korrelationsfunktion des quantenmechanischen Exzitonenoperators b_q

$$D_x(k,t) = -i \langle T b_q(t) b_q^\dagger(t) \rangle \quad (4.3)$$

definiert. Die Bewegungsgleichung dieser Korrelationsfunktion erhält man, wenn man die Bewegungsgleichung des Operators b_q

$$\partial_t b_q = i[H, b_q] \quad (4.4)$$

in die Korrelationsfunktion (4.3) einsetzt. Für ein System aus miteinander wechselwirkenden Biexzitonen (a), Exzitonen (b) und Photonen (c) lautet der Hamiltonoperator ($\hbar=c=V=1$)

$$H = \sum_{k,q} \omega_{xx}(k+q) a_{k+q}^\dagger a_{k+q} + \omega_x(q) b_q^\dagger b_q + \epsilon_\infty^{-\frac{1}{2}} c_k^\dagger c_k + i\frac{1}{2} M [a_{k+q}^\dagger c_k b_q + \text{h.k.}] , \quad (4.5)$$

wobei ω_{xx} die Biexzitonenenergie und M das impulsunabhängige Matrixelement für die Bildung von Biexzitonen ist. Die Bewegungsgleichung für die exzitonische Greensfunktion ist durch

$$i\partial_t D_x = \delta(t) + \omega_x D_x + \sum i\frac{1}{2} M F(k,q,t) . \quad (4.6)$$

gegeben. Die dabei auftretende Dreipunktkorrelationsfunktion

$$F(k,q,t) = -i \langle T c_k^\dagger(t) a_{k+q}(t) b_q^\dagger(0) \rangle , \quad (4.7)$$

folgt näherungsweise der Gleichung

$$i\partial_t F \approx [\omega_{xx}(k+q) - k] F - i M D_x . \quad (4.8)$$

In der Bewegungsgleichung von F koppeln höhere Korrelationsfunktionen an. Diese wurden in Gleichung (4.8) faktorisiert. Die dabei auftretenden Dichten von Exzitonen und Biexzitonen wurden vernachlässigt. Transformiert man diese Gleichungen in den Frequenzraum, erhält man ein gekop-

peltes algebraisches System. Aus der Lösung dieses Systems resultiert die folgende dielektrische Funktion

$$\epsilon(\omega)=\epsilon_{\infty}+(\epsilon_0-\epsilon_{\infty})\omega_x^2/[\omega_x^2-\omega^2-\Omega^2(\omega)] \tag{4.9}$$

mit

$$\Omega^2(\omega)=4N_p|M|^2\omega_x(\omega_{xx}-\omega)/[\omega_{xx}(\omega_{xx}-2\omega+i\gamma_{xx})] \; .$$

N_p ist die Dichte der Photonen im Kristall (Polaritonen) und γ_{xx} ist die effektive Verbreiterung des Moleklzustandes.

Die Eigenmoden des Systems zeigen eine intensitätsabhängige Renormierung bei der halben Biexzitonenenergie.

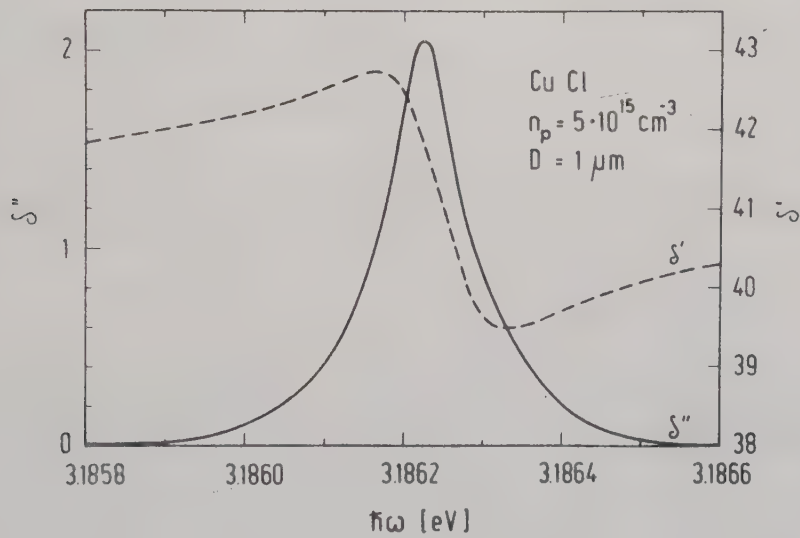


Abbildung 9. Die Renormierung der Phasenverschiebung:
 Die Erzeugung von Biexzitonen bewirkt für einen 1μm dicken CuCl Kristall die Phasenverschiebung $\delta=\delta'+i\delta''=\omega\sqrt{\epsilon}/c$ (2.10) /Koch 81/.

Diese Änderungen in der Dispersion wurden experimentell in CuCl durch resonante Ramanstreuung ausgemessen /Grun 83, Hönerlage 83/. Die Ergebnisse wurden mit Hilfe der dielektrischen Funktion (4.9) und der folgenden Parameter angepaßt.

$$\begin{aligned}
 |M|^2 &= 1.572 \cdot 10^{-22} (\text{eV})^2 \text{cm}^3 \\
 \omega_{xx} &= 6.3725 \text{eV} \\
 \omega_x &= 3.2027 \text{eV} \\
 \epsilon_{\infty} &= 5 \\
 \epsilon_0 &= 5.0172
 \end{aligned}$$

Abbildung 10. Tabelle der Parameter für CuCl

In der obigen dielektrischen Funktion ist noch der Zusammenhang zwischen der Dichte der Photonen und der Intensität zu bestimmen. Im Spektralbereich abseits der absorptiven Resonanz breitet sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Intensität mit der Gruppengeschwindigkeit aus. In der Nähe einer Resonanz stimmt dieser Sachverhalt nicht mehr und das Licht propagiert nun mit einer renormierten Geschwindigkeit, der Energiegeschwindigkeit.

Zu deren Herleitung geht man am einfachsten von der Kontinuitätsgleichung des elektromagnetischen Feldes

$$\partial_z S + (E \partial_t D + H \partial_t H) / 4\pi = 0 \quad (4.10)$$

mit dem Poyntingvektor

$$S = E_x H / 4\pi \quad (4.11)$$

aus /Loudon 70, Schmitt-Rink 81/. Die dielektrische Funktion besitzt formal die Struktur eines harmonischen Oszillators

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} + E_0^2(\omega) [E_x^2(\omega) - \omega^2 - i\omega\Gamma(\omega)]^{-1} \quad (4.12)$$

Unter Vernachlässigung der impliziten Frequenzabhängigkeiten erhält man mit dem Verschiebungsfeld

$$D = E + 4\pi P \quad (4.13)$$

aus der dielektrischen Funktion eine Bewegungsgleichung für die Polarisierung

$$\partial_t^2 P + \Gamma \partial_t P + E_x^2 P = E_0^2 E / 4\pi \quad (4.14)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird das elektrische Feld E aus der Kontinuitätsgleichung eliminiert. Die zeitliche Änderung der rechten Seite der Kontinuitätsgleichung ist nun durch

$$(E \partial_t D + H \partial_t H) / 4\pi = \partial_t U + 4\pi \Gamma P_t^2 / E_0^2 \quad (4.15)$$

mit der Energiedichte

$$U = (E^2 + H^2) / 8\pi + 2\pi [(\partial_t P)^2 + E_x^2 P^2] / E_0^2 \quad (4.16)$$

gegeben. Der erste Summand von U beschreibt die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes, während das Medium durch den zweiten Summanden bestimmt ist. Die Dissipation des Systems ist durch den Term proportional P_t^2 gegeben. Bei der Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Pulses ist man nicht an dessen zeitlichen Schwankungen sondern nur an dessen mittlerer Geschwindigkeit interessiert. Deshalb mittelt man die Kontinuitätsgleichung noch zeitlich und erhält dann aus dem mittleren Poyntingsvektor

$$\langle S \rangle = c n |E|^2 / 8\pi = I$$

und der gemittelten Energie

$$\langle U \rangle = n^2 |E|^2 (1 + \alpha c / n \Gamma) / 8\pi$$

die Energiegeschwindigkeit v_E als

$$v_E = \langle S \rangle / \langle U \rangle = v_p [1 + \alpha c / n \Gamma]^{-1} . \quad (4.17)$$

n ist der Brechungsindex und α die Absorption des Mediums. Die Phasengeschwindigkeit ist als $v_p = c/n$ definiert und die Intensität ist über die Energiegeschwindigkeit

$$I = v_E \omega N_p . \quad (4.18)$$

mit der Dichte N_p verknüpft.

Für die Biexzitonenerzeugung wurde diese Energiegeschwindigkeit berechnet und ist für verschiedene Energien unterhalb der halben Biexzitonenergie in Abbildung 11 aufgetragen /Schmitt-Rink 81/. Die Niederdichtekurve zeigt eine Abnahme der Energiegeschwindigkeit, wenn die Laserfrequenz die Resonanzfrequenz des Exzitons erreicht ($\omega = \omega_x$). Mit wachsender Polaritondichte entsteht eine induzierte Nichtlinearität bei der halben Biexzitonenergie ($\omega = \omega_{xx}/2$). Bei sehr hohen Dichten ist der Kristall wieder transparent. Bei einer schwach gedämpften Resonanz ($\Gamma \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$) geht die Energiegeschwindigkeit wieder in die Gruppengeschwindigkeit über.

$$v_E \approx v_g = c / \partial_\omega (\omega n) \quad (4.19)$$

Die Intensität ist eine Funktion der Amplitude E des elektrischen Feldes

$$I = cn |E|^2 / 8\pi . \quad (4.20)$$

Approximiert man noch den Brechungsindex n durch seinen intensitätsunabhängigen Anteil $\sqrt{\epsilon_1}$, findet man für die Dichte

$$N_p = \epsilon_1 |E|^2 / 8\pi \omega . \quad (4.21)$$

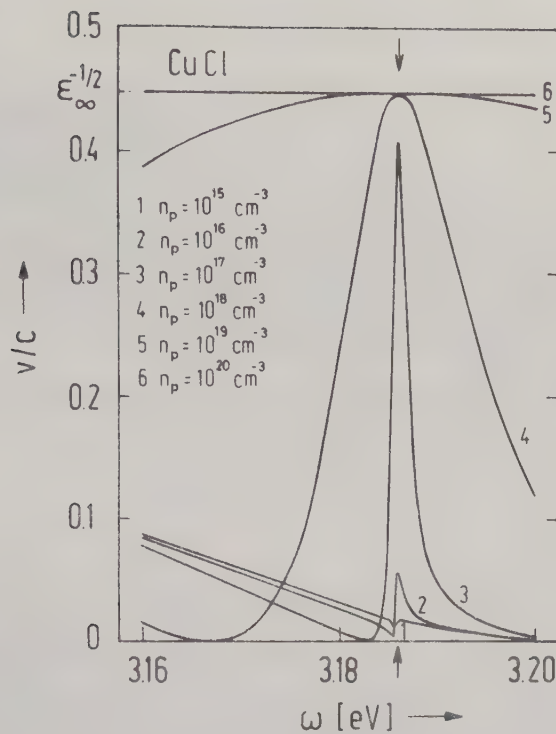


Abbildung 11. Die Energiegeschwindigkeit in der Nähe der Biexzitonenresonanz in CuCl:
 (1) $N_p = 10^{15}$, (2) 10^{16} , (3) 10^{17} , (4) 10^{18} , (5) 10^{19} ,
 (6) 10^{20} /Schmitt-Rink 81/

Damit ist die Intensitätsabhängigkeit der dielektrischen Funktion für die weiteren Rechnungen festgelegt.

Einen ersten Überblick darüber, ob diese dielektrische Funktion optische Bistabilität zeigt, erhält man, wenn man die dielektrische Funktion (4.9,4.21) in die Mehrfachreflexionslösung eines Fabry- Perot- Resonators (2.11) einsetzt. Das Ergebnis ist in Abbildung 12 aufgetragen /Koch 81/.

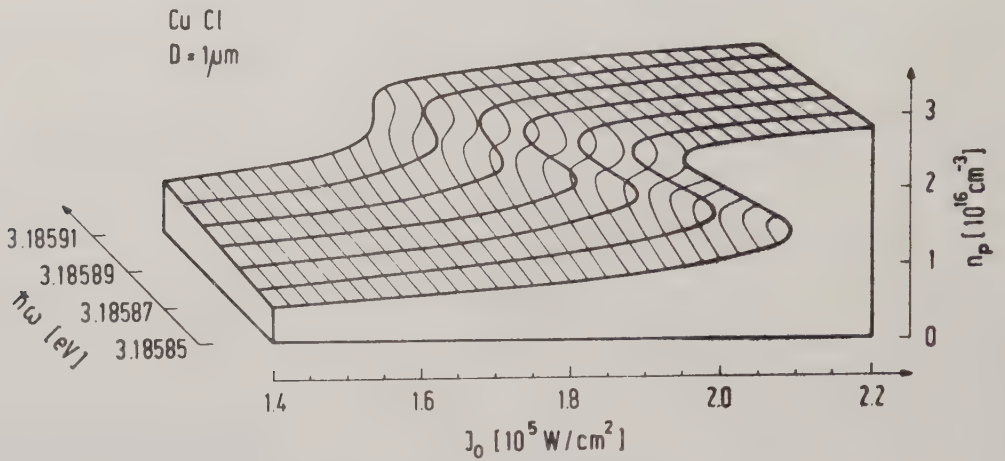


Abbildung 12. Berechnete Polaritondichte für ein 1 μ m dickes CuCl-Blättchen als Funktion der Frequenz und der Eingangsintensität für verschiedene Frequenzen unterhalb der halben Biexzitonenergie /Koch 81/.

Aus Abbildung 9 auf Seite 37 findet man, daß die dispersive Renormierung umso stärker wird, je mehr man sich der Resonanz bei der halben Biexzitonenergie nähert, dh. größere Hystereseschleifen bei Annäherung an die Resonanz. In deren Nähe setzt jedoch auch die induzierte Absorption ein, die die dispersive Bistabilität zerstört. Dieses Verhalten erkennt man deutlich in Abbildung 12, wo mit Annäherung an die Resonanzfrequenz die Bistabilität langsam verschwindet.

Die Bewegungsgleichungen

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Bewegungsgleichung des elektrischen Feldes dient die Wellengleichung. Im weiteren wird nur die Ausbreitung des Lichtes in z- Richtung untersucht. Transversale Effekte werden vernachlässigt. Die eindimensionale Wellengleichung lautet

$$c^2 \partial_z^2 E = \partial_t^2 E + 4\pi \partial_t^2 P . \quad (4.22)$$

Die Polarisation wird in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil zerlegt

$$P = P_1 + P_{n1} = (\chi_1 + \chi_{n1})E = (\epsilon_1 - 1 + \epsilon_{n1})E/4\pi, \quad (4.23)$$

wobei χ_1 und χ_{n1} der intensitätsunabhängige und der nichtlineare Anteil der Suszeptibilität sind.

Regt man das Medium mit einem monochromatischen elektrischen Feld an, wird sicher auch die Polarisation wesentlich durch diese Frequenz bestimmt. Außer dieser dominierenden Frequenz werden auch noch weitere Frequenzen durch nichtlineare Prozesse angeregt. Diese Effekte werden im folgenden vernachlässigt. Das elektrische Feld und die Polarisation werden nach dieser monochromatischen Frequenz entwickelt

$$(E, P) = (E'', P'') e^{i(kz - \omega t)} + k.c. \quad (4.24)$$

Weiterhin nimmt man an, daß die einfallende Frequenz ω um $\Delta\omega$ gegenüber der Eigenfrequenz des Resonators ω_R ($\omega = \omega_R + \Delta\omega$) verstimmt ist. Verwendet man noch die Dispersionsrelation des linearen Mediums ($k = \omega_R \sqrt{\epsilon_1}/c$), erhält man bei Vernachlässigung der Terme in Ordnung $(\Delta\omega)^2$ und der zweiten Ableitungen der Amplituden die folgende Differentialgleichung des komplexen elektrischen Feldes (Die Doppelstriche werden im folgenden weggelassen)

$$c/(\sqrt{\epsilon_1}) \partial_z E + \partial_t E - i\Delta\omega E = i\omega_R \epsilon_{n1} E / (2\epsilon_1). \quad (4.25)$$

Diese Gleichung beschreibt die Wechselwirkung eines Lichtfeldes mit einem nichtlinearen Medium. Bei dieser Gleichung ist noch zu berücksichtigen, daß sich das Lichtfeldes in einem Resonator befindet. Für den betrachteten Fabry-Perot-Resonator wird das elektrische Feld und die Polarisation in einen vor- und einen rückwärts laufenden Teilstrahl zerlegt, die bei kleinen optischen Dicken näherungsweise räumlich homogen sind. Für kleine Transmissionskoeffizienten sind beide ungefähr gleich groß. Deshalb geht man in der sogenannten "mean-field"-Approximation zu räumlich gemittelten Größen über.

$$\langle E \rangle = \int E dz / L$$

und

$$\langle EB \rangle = \langle E \rangle \langle B \rangle .$$

(4.26)

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen des Fabry- Perot- Resonators (2.8) erhält man die Transportgleichung des elektrischen Feldes (Die Mittelwerte werden nicht mehr geschrieben)

$$\partial_t E = -K(E - E_i / \sqrt{T}) + i\Delta\omega E + i\omega_R(\varepsilon - \varepsilon_1)E / 2\varepsilon_1 ,$$

(4.27)

wobei $K = (1 - \sqrt{R})c/L$ die Dämpfungskonstante des Resonators ist.

(4.27) ist die Bewegungsgleichung eines elektrischen Feldes in einem Resonator. Die stationäre Lösung dieser Gleichung ($\partial_t E = 0$, durchgezogene Kurve in Abbildung 13) zeigt eine typische Hysteresekurve in der Transmission. Bei bedeutend höheren Werten des Eingangsfeldes gibt es höhere Instabilitäten, die aber im weiteren nicht näher untersucht werden.

Die beiden stabilen Zustände der Transmission werden in der komplexen Ebene des elektrischen Feldes ($\text{Re}(E)$, $\text{Im}(E)$) auf zwei Punkte abgebildet. Da normalerweise das einfallende Feld um einen Mittelwert schwankt, verbreitern die beiden Punkte und werden zu den Mittelpunkten zweier Verteilungen, die den Einfluß der Fluktuationen auf das elektrische Feld beschreiben. Die Breite der Verteilungen wird durch den speziellen mikroskopischen Prozess bestimmt. Die transmittierte Intensität ist nicht mehr durch den Wert des jeweiligen Astes bestimmt, sondern wird jetzt als ein gewichteter Mittelwert aus den beiden stabilen Zuständen berechnet. Im stationären Fall führt die gemittelte transmittierte Intensität zu einem kontinuierlichen Übergang zwischen den beiden Zuständen der Transmission. Sie befindet sich genau zwischen den beiden Zuständen, falls die Wahrscheinlichkeit von beiden Zuständen gleichgroß ist (verallgemeinerte Maxwellkonstruktion).

Die Schwankungen des elektrischen Feldes werden durch Addition einer Gauß- Markov- Kraft in den Bewegungsgleichungen simuliert (vgl. Anhang A). Für einen Gauß- Markov- Prozess sind die Ensemblemittelwerte der Fluktuationen ξ durch

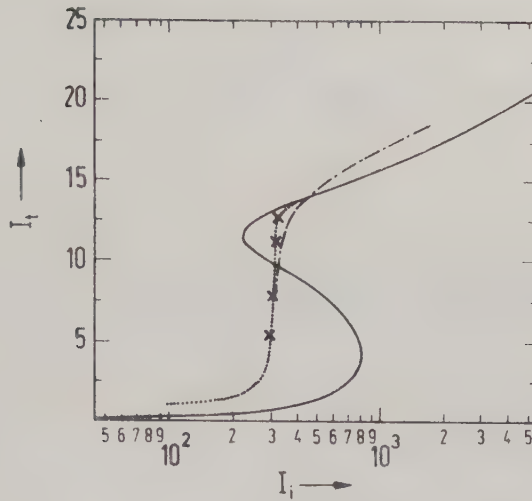


Abbildung 13. Vergleich der stationären Lösungen der transmittierten Intensität:
[— deterministisch, ••• Simulation, - - - analytisch]

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \xi(0) \rangle &= \langle \xi^*(t) \xi^*(0) \rangle = 0 \\ \langle \xi(t) \xi^*(0) \rangle &= \langle \xi^*(t) \xi(0) \rangle = 2Q\delta(t) , \end{aligned} \quad (4.28)$$

definiert, wobei Q die Stärke der Fluktuationen mißt.

Da in dem hier untersuchten Fall optisch bistabiles Verhalten schon bei Intensitäten auftritt, bei denen die Nichtlinearität der dielektrischen Funktion noch klein ist, kann die nichtlineare dielektrische Funktion in einer Potenzreihe in der Intensität entwickelt werden. In der einfachsten Näherung berücksichtigt man die Nichtlinearität nur in niedrigster Ordnung. Diese Näherung kann nur sinnvoll durchgeführt werden, wenn alle dabei auftretenden Ordnungen global stabil sind. Ansonsten ist die volle Nichtlinearität zu behandeln. Ein Vergleich der stationären, deterministischen Transmissionskurve zwischen der vollen Nichtlinearität und der entwickelten Form von χ_{nl} zeigt, daß sich durch die Entwicklung die Form des instabilen und des oberen stabilen Zustandes geringfügig verändert hat.

Die Bewegungsgleichung (4.27) lauten jetzt mit der entwickelten Nichtlinearität

$$\partial_t E = -K(E - E_i/\sqrt{T}) + i\Delta\omega E - (\Omega_2 - i\Omega_1)|E|^2 + \xi(t) . \quad (4.29)$$

Hierbei ist

$$\omega_R \varepsilon_{n1}/2\varepsilon_1 = (\Omega_1 + i\Omega_2)|E|^2 \quad (4.30)$$

mit $\Omega_1 = (\omega_{xx} - 2\omega)R$, $\Omega_2 = \gamma_{xx}R$ und

$$R = (\varepsilon_1 - \varepsilon_\infty)^2 [2\pi(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)]^{-1} |M|^2 \omega_R (\omega_{xx} - \omega) / \{ \omega \omega_{xx} \omega_x [(\omega_{xx} - 2\omega)^2 + \gamma_{xx}^2] \} .$$

Mit der Skalierung $\tau = (2Q\Omega_1)^{1/2} t$, $\varepsilon = (\Omega_1/2Q)^{1/4} E_i/\sqrt{T}$, $\kappa = K/(2Q\Omega_1)^{1/2}$, $\Delta = \Delta\omega/(2Q\Omega_1)^{1/2}$, $E = (\Omega_1/2Q)^{1/4} E$, $\omega = \Omega_2/\Omega_1$ und $F(\tau) = (2Q\Omega_1)^{1/4} \xi(t)$ wird die Gleichung (4.29) in die dimensionslose Langevin-Gleichung

$$\partial_\tau E = \kappa \varepsilon - E(\kappa + \omega|E|^2) + iE(\Delta + |E|^2) + F(\tau) . \quad (4.31)$$

Überführt. Wertet man diese Skalierung mit den Materialparametern von CuCl (Abbildung 10) aus, findet man, daß die Zeit in 6.3×10^{-2} ps und die Intensität in 463.5 W/cm^2 gemessen wird.

Das dynamische Verhalten des elektrischen Feldes E wird im weiteren nicht mehr mittels der Langevingleichung (4.31) sondern mit der stochastisch äquivalente Fokker-Planck-Gleichung untersucht.

$$\partial_\tau f = L_{FP} f \quad (4.32)$$

Der Fokker-Planck-Operator L_{FP} lautet in kartesischen ($E = x + iy$)

$$L_{FP} = \partial_x \{ x[\kappa + \omega(x^2 + y^2)] + y(\Delta + x^2 + y^2) + \kappa \varepsilon \} + \partial_y \{ y[\kappa + \omega(x^2 + y^2)] - x(\Delta + x^2 + y^2) \} + \frac{1}{2} Q (\partial_x^2 + \partial_y^2) \quad (4.33)$$

und in Polarkoordinaten ($E=\sqrt{x} \exp(i\phi)$)

$$L_{FP} = 2\partial_x x(\kappa + \omega x) - (\Delta + x)\partial_\phi + \partial_x x \partial_x + (4x)^{-1} \partial_\phi^2 + 2\kappa \varepsilon \sqrt{x} (\cos \phi \partial_x - \sin \phi (2x)^{-1} \partial_\phi) . \quad (4.34)$$

In Polarkoordinaten hat die erste Zeile des Fokker-Planck-Operators die Struktur eines Einmodenlasers mit einer endlichen Verstimmung Δ /Risken 80/. Die Fokker-Planck-Gleichung des Einmodenlasers kann exakt gelöst werden. Die zweite Zeile beschreibt den Einfluß des einfallenden Lichtfeldes ε und ist dafür verantwortlich, daß das detaillierte Gleichgewicht zerstört ist. Wegen des fehlenden detaillierten Gleichgewichts ist es bisher nicht gelungen, die Fokker-Planck-Gleichung (4.32) für eine allgemeine Wahl der Parameter analytisch zu lösen. Deshalb werden im folgenden verschiedene Näherungen und numerische Lösungen diskutiert.

4.1.1 DIE STATIONÄRE LÖSUNG DER FOKKER-PLANCK-GLEICHUNG

Im weiteren wird ein von Graham und Schenzle entwickeltes Lösungsverfahren auf die Fokker-Planck-Gleichung angewendet /Graham 81/. Für kleine Rauschstärken macht man den Ansatz

$$f_{st}(x, y) = N \exp(-2\phi/Q) . \quad (4.35)$$

Im Grenzfall verschwindender Fluktuationen ($Q \rightarrow 0$) resultiert mit $\delta = \Delta/\kappa$ eine nichtlineare, partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_y \phi)^2 \\ & - \{x[\kappa + \omega(x^2 + y^2)] + y(\kappa \delta + x^2 + y^2) + \kappa \varepsilon\} \partial_x \phi \\ & - \{y[\kappa + \omega(x^2 + y^2)] - x(\kappa \delta + x^2 + y^2)\} \partial_y \phi = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Für ein verschwindendes Eingangsfeld liegt wieder detailliertes Gleichgewicht vor und die Fokker-Planck-Gleichung wird durch

$$\phi_0 = \kappa(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2)^2. \quad (4.37)$$

gelöst. Mit dem Ansatz

$$\phi = \phi_0 + 2\varepsilon [\kappa(1 + \delta^2)^{-1}(x + \delta y) + \phi_1] \quad (4.38)$$

erhält man durch Einsetzen in (4.36) für kleine Eingangsfelder eine lineare Differentialgleichung in ϕ_1 , der ersten Korrektur zu ϕ_0 ,

$$\begin{aligned} & \{x[\kappa + \omega(x^2 + y^2)] + y(\kappa\delta + x^2 + y^2)\} \partial_x \phi_1 \\ & \{y[\kappa + \omega(x^2 + y^2)] - x(\kappa\delta + x^2 + y^2)\} \partial_y \phi_1 \\ & = \kappa(\omega\delta - 1)(1 + \delta^2)^{-1}(x^2 + y^2)(x\delta - y). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Diese läßt sich nach Transformation auf Polarkoordinaten ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$)

$$r(\kappa + \omega r^2) \partial_r \phi_1 + (\kappa\delta + r^2) \partial_\varphi \phi_1 = \kappa(\omega\delta - 1)(1 + \delta^2)^{-1} r^3 (\delta \cos \varphi - \sin \varphi) \quad (4.40)$$

lösen. Die linke Seite bildet ein vollständiges Differential, wenn die Beziehung

$$\partial_r \varphi = -(\kappa\delta + r^2) / r(\kappa + \omega r^2) \quad (4.41)$$

gilt. Setzt man die Lösung von Gleichung (4.41)

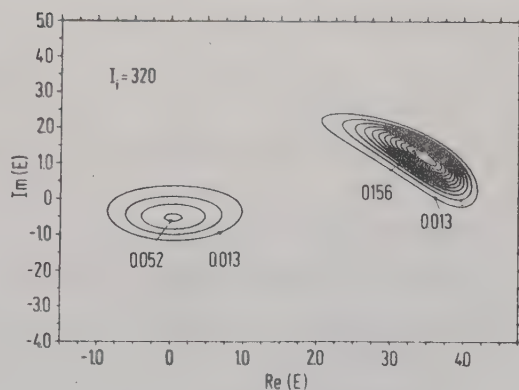
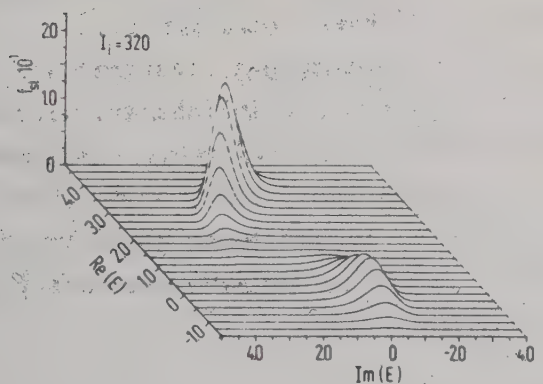
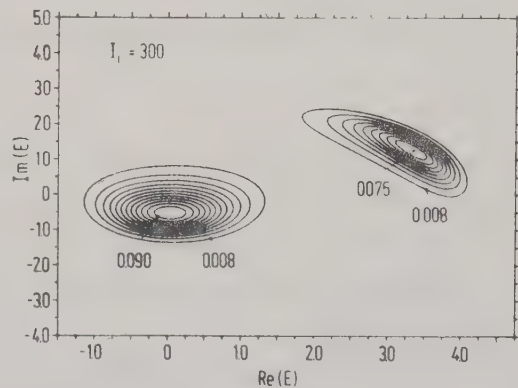
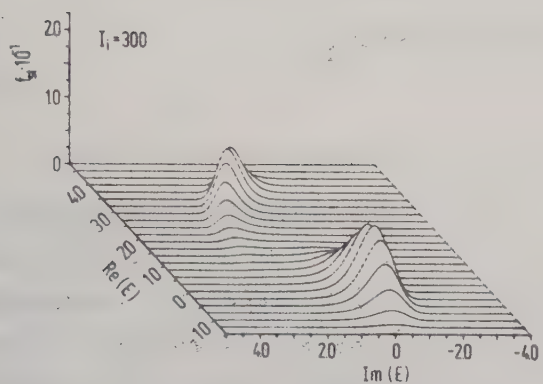
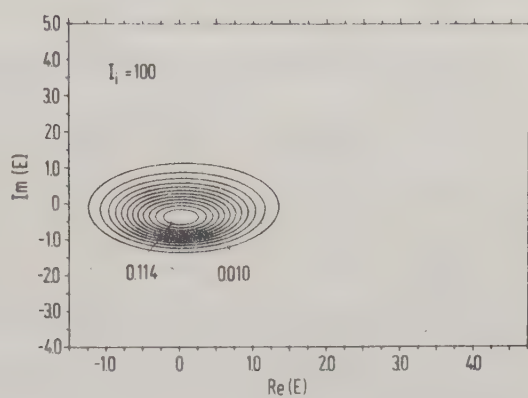
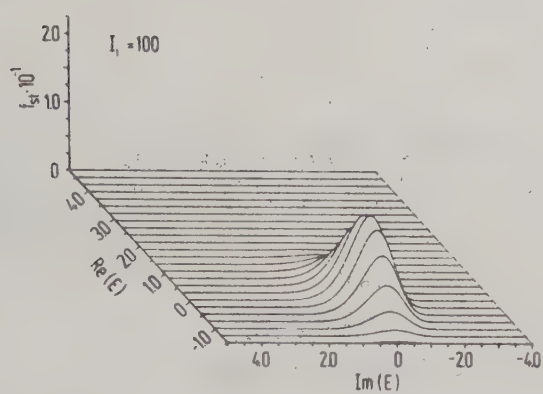


Abbildung 14. Die stationäre Verteilungsfunktion für verschiedene Eingangsfelder

$$\Phi(r) = \Phi_0 - \delta \ln(r) + \frac{1}{2}(\delta\omega - 1) \ln(\kappa + \omega r^2) \quad (4.42)$$

ein, findet man als Ergebnis von (4.40)

$$\phi_1 = (\omega\delta - 1)(1 + \delta^2)^{-1} r^3 \int dx x^2 (1 + gx^2)^{-1} (\delta \cos(h(x)) - \sin(h(x))) \quad (4.43)$$

mit

$$g = \omega r^2 / \kappa \text{ und } h(x) = \Phi - \delta \ln(x) + (\delta\omega - 1)(2\omega)^{-1} \ln[(1 + gx^2)/(1 + g)]$$

Zusammengefaßt findet man für das Ginzburg-Landau Potential Φ

$$\phi = \kappa r^2 + \frac{1}{2} \omega r^4 + 2\epsilon \kappa (1 + \delta^2)^{-1} r [\cos(\Phi) + \delta \sin(\Phi)] + 2\epsilon \phi_1 \quad (4.44)$$

Für einen 1 μm dicken CuCl-Kristall werden unter Verwendung der Materialparameter aus Abbildung 10 κ , ω und Δ als $\kappa = 0.577$, $\omega = 0.164$ und $\Delta = -12.064$ bestimmt. Die mit Hilfe des Potentials (4.44) aufgetragene stationäre Verteilungsfunktion f_{st} (4.35) ist in Abbildung 14 aufgetragen. Diese Verteilungsfunktion zeigt zwei deutlich ausgeprägte Maxima, die voneinander getrennt sind. Die beiden Maxima in den Verteilungsfunktionen sind durch die Lösung der deterministischen Gleichungen bestimmt. Die Absoluthöhe eines Maximums ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Zustand besetzt ist. Das Verhältnis von beiden Maxima zueinander gibt die relative Lage der Intensität zwischen den beiden deterministischen Zuständen an. Dieses Verhalten wird in Abbildung 13 auf Seite 45 verdeutlicht. Hier ist zu der deterministischen Hystereseschleife (durchgezogene Linie) das erste Moment der Intensität

$$I_t = \int dx dy (x^2 + y^2) f_{\text{st}}(x, y), \quad (4.45)$$

das aus der Lösung der Potentials (4.44) berechnet wurde, aufgetragen (Strich-Punkt). Das stationäre Verhalten der Intensität ist jetzt eine eindeutige Funktion der Eingangsintensität (I_i). Zusätzlich ist in diese Kurve das "exakte", stationäre Moment einer numerischen Simulation aufgetragen (gepunktet - siehe dazu auch den nächsten Abschnitt). Für kleine

Eingangsfelder stimmen beide Ergebnisse am Anfang des bistabilen Bereichs überein. Erst kurz bevor die transmittierte Intensität den oberen Transmissionszustand erreicht, weichen beide Kurven voneinander ab. Anschließend steigt das genäherte, analytisch berechnete Moment der Intensität schneller an als die numerisch erzielte Lösung und strebt zu einem Wert oberhalb des oberen Astes. Dieses Verhalten ist aber nicht erstaunlich, da man zur Erzielung dieses Resultats das Potential nur in niedrigster Ordnung des Eingangsfeldes berechnet hat.

Mit Hilfe der stationären Lösung der Fokker-Planck-Gleichung kann man den Fokker-Planck-Operator hermitisieren. Diese Methode kann mit der oben berechneten Lösung wegen des dabei auftretenden Integrals nicht mehr analytisch durchgeführt werden. Man greift in diesem speziellen Fall dann besser gleich auf numerische Methoden zurück.

Aber nicht nur das dynamische sondern auch stationäre Problem kann direkt numerisch gelöst werden.

Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. Zum einen kann die Fokker-Planck-Gleichung diskretisiert werden und die Verteilungsfunktion kann mit der Methode der endlichen Differenzen /Forsythe 64/ oder mit Hilfe der Methode der finiten Elemente /Zienkiewicz 77/ berechnet werden. Beide Methoden erfordern aber einen erheblichen numerischen Aufwand. Man kann sich aber auch auf einen etwas pragmatischeren Standpunkt stellen und diskretisiert die Fokker-Planck-Gleichung bezüglich der zyklischen Variablen und löst das daraus folgende System von gekoppelten Differentialgleichungen numerisch.

Eine weitere Methode zur Behandlung von niederdimensionalen partiellen Differentialgleichungen wurde von Riskin und seiner Gruppe oft mit Erfolg angewendet /Riskin 84/. Sie entwickelten eine Methode weiter, die gut geeignet ist, sanfte Übergänge in den Verteilungsfunktionen darzustellen. Diese Methode eignet sich deshalb besonders gut für große Rauschstärken. Dabei wird die Verteilungsfunktion nach orthogonalen Funktionensätzen entwickelt. Aus einer partiellen Differentialgleichung entsteht dadurch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für die Entwicklungskoeffizienten /Riskin 80/. Diese Methode wurde von Haug et al auf die Fokker-Planck-Gleichung der Biexzitonenerzeugung angewendet und lieferte vergleichbare Ergebnisse /Haug 82a/.

4.1.2 DIE DYNAMISCHE LOESUNG DER LANGEVINGLEICHUNG

Die dynamische Behandlung der zeitabhängigen Fokker- Planck- Gleichung ist numerisch oft sehr aufwendig, da eine direkte numerische Integration zu erheblichen Stabilitätsproblemen führt. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb für die dynamische Beschreibung von stochastischen Prozessen ein anderer Weg beschritten und anstelle der Fokker- Planck- Gleichung wieder die ursprüngliche Langevingleichung behandelt.

Für die numerische Behandlung ist es notwendig zu wissen, wie die Langevin- Gleichung (4.39) richtig diskretisiert wird. Zur Herleitung eines numerischen Algorithmus gehe ich von einer allgemeinen Langevin- Gleichung aus

$$dx=f(x)dt+g(x)dW . \quad (4.46)$$

W ist dabei ein Wiener Prozess. Die Langevin- Gleichung wird zunächst in eine stochastisch äquivalente Integralgleichung überführt

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\int dt' f(x) +\int g dW . \quad (4.47)$$

Das Integral über den Wiener Prozess liefert die Definition von "weißen Rauschen" /Arnold 72/

$$\int_a^b dW=(b-a)^{1/2} \xi . \quad (4.48)$$

Das Integral aus Gleichung (4.47) über den Wiener Prozess liefert in der Ito Interpretation nur an der unteren Integralgrenze einen nichtverschwindenden Beitrag von g und man erhält

$$x(t+\Delta t)=x(t)+\int dt' f(x) +g(x,t)\sqrt{\Delta t} \xi \quad (4.49)$$

Das übrigbleibende Integral kann als eine Potenzreihe in Δt dargestellt werde. In niedrigster Ordnung findet man beispielsweise

$$x(t+\Delta t)=x(t)+f\Delta t+g\sqrt{\Delta t}\xi+O(\Delta^{3/2}t)$$

(4.50)

Für die numerische Integration wird der Anfangswert der stochastischen Variablen x vorgegeben. Im Sinn und Geist der Ito-Interpretation wird dann zu dieser stochastischen Variablen ein Rauschbeitrag addiert und mit der resultierenden stochastischen Variablen das "deterministische Gleichungssystem" durch ein 5.ter Ordnungsverfahren aufintegriert /Nordsiek 62/. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis die gewünschte Endzeit erreicht ist.

Dieses Verfahren wurde an verschiedenen exakt lösbaren Beispielen getestet. Dazu wurde die Langevingleichung für verschiedene Realisierungen unabhängig berechnet. Bildet man anschließend den arithmetischen Mittelwert über diese Realisierungen, weicht dieser Mittelwert nur um maximal 10% von der exakten Lösung ab.

Dieses Verfahren wurde auf verschiedene Probleme angewendet und es konnten bisher keine Stabilitätsprobleme festgestellt werden /Schmidt 83, Neumann 84/.

Nach der Durchführung unserer Rechnungen wurden verschiedene Arbeiten veröffentlicht, die sich mit der Entwicklung von Algorithmen beschäftigten, mit denen stochastische Gleichungen stabil aufintegriert werden können /Helfant 83, Gerling 84, Thomas 84/. Nachträglich habe ich unser Verfahren mit deren Methoden verglichen und nur Abweichungen gefunden, die sich wieder in der Größenordnung von etwa 10% bewegten. Im Gegensatz zu den anderen Methoden braucht meine Methode nur die halbe Rechenzeit.

Mit dieser gerade entwickelten Methode werden nun die beiden gekoppelten Langevingleichungen des Real- und des Imaginärteils des elektrischen Feldes aufintegriert. Das dazugehörige Programm ist im Anhang B aufgelistet. Die interessierenden physikalischen Größen werden als arithmetische Mittelwerte über typischerweise 1000 Realsierungen berechnet. Die mittlere Intensität ist beispielsweise durch

$$\langle I(t) \rangle = \sum I_n(t) / K$$

(4.51)

gegeben. K ist dabei die Zahl der Realisierungen und I_n die Intensität der n -ten Realisierung.

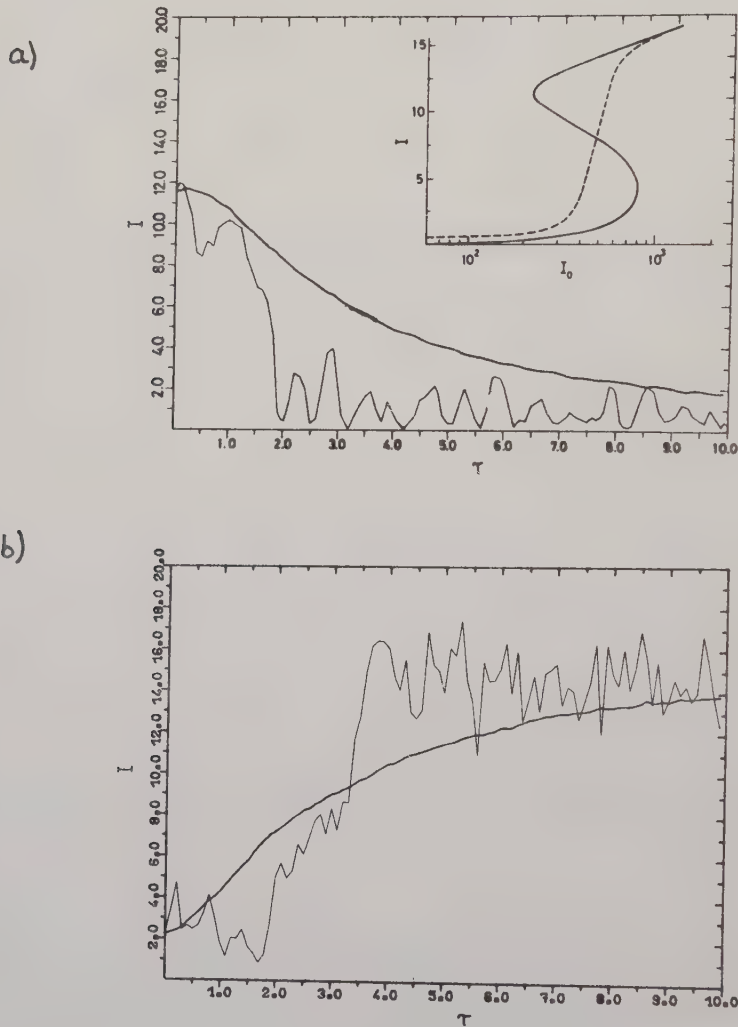


Abbildung 15. Zeitliche Entwicklung der Intensität:

a) Herunterschalten $I_0=222$, b) Hochschalten $I_0=650$
 Die durchgezogene Kurve kennzeichnet den Mittelwert über 1000 Realisierungen. Eine typische Realisierung ist als dünne Linie dargestellt. Der Einschub stellt die stationäre Situation dar /Schmidt 83/.

Mit dieser Methode wurde zunächst die Stabilität der beiden Zustände gegen Fluktuationen untersucht. Das System wurde dabei als Deltafunktion auf einen der beiden bistabilen Äste präpariert. Dann wurde betrachtet, wie sich dieser Anfangszustand unter Einbeziehung von Fluktuationen zeitlich entwickelt. In Abbildung 15 ist die Intensität als Funktion der Zeit sowohl für den Mittelwert als auch für eine typische Realisierung aufgetragen.

Man findet in beiden gezeigten Fällen ein Schalten zum jeweils anderen Ast. Die beiden Anfangszustände sind also gegen Fluktuationen instabil.

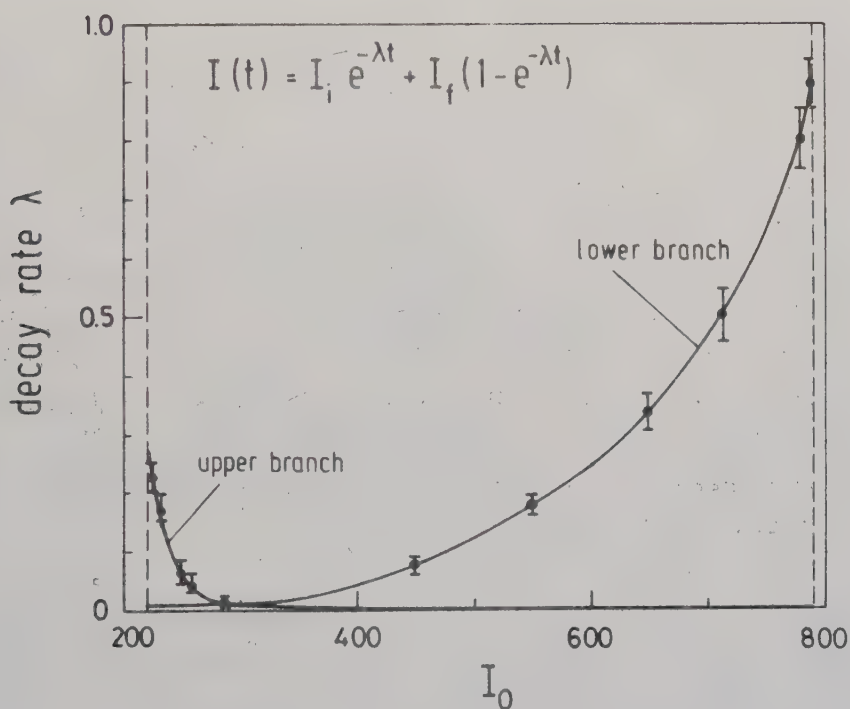


Abbildung 16. Zerfallsrate λ als Funktion der Eingangsintensität I_0 /Schmidt 83/.

Um dieses Verhalten genauer zu untersuchen wurde eine Serie solcher Simulationen durchgeführt. Es zeigte sich, daß das zeitliche Verhalten der Intensität mit Hilfe der Formel

$$I(t) = I_i \exp(-\lambda t) + I_f [1 - \exp(-\lambda t)] \quad (4.52)$$

gut beschrieben werden kann. λ ist die effektive Zerfallsrate, I_i und I_f sind die Intensität des Anfangs- ($t=0$) und des Endzustandes ($t=\infty$). Die Form dieses Ansatzes erhält man, wenn die Verteilungsfunktion nach Eigenzuständen entwickelt wird und dabei nur der niedrigste Eigenzustand berücksichtigt wird. In Abbildung 16 ist die Zerfallsrate als Funktion der Eingangsintensität I_0 aufgetragen.

Es zeigt sich, daß der untere Ast in einem großen Wertebereich der Eingangsintensität bedeutend schneller zerfällt als der obere Ast.

Dies ist eine Konsequenz der relativen Rauschintensität, die für den oberen Ast bedeutend kleiner ist als für den unteren Zustand. Damit zeigt sich, daß die Hystereseschleife der "mean-field" Lösung auch unter dem Einfluß von Fluktuationen erhalten bleibt. Lediglich die Fläche der Hysterese wird mit zunehmender Rauschintensität reduziert.

Sehr illustrativ ist in diesem Zusammenhang die Darstellung der zeitabhängigen Verteilungsfunktion. Dazu wird das System ziemlich am Ende des unteren Astes bei einer Eingangsintensität von $I_0=795$ präpariert. Dann wurde die Langevin-Gleichung (4.27) für 10000 statistisch unabhängige Realisierungen numerisch aufintegriert. Die Ebene des komplexen Feldes wurde mit einem Raster überdeckt und die Anzahl von der Realisierungen pro Unterteilung ausgezählt. Daraus wurde die Wahrscheinlichkeit als Funktion der Zeit rekonstruiert.

Für kleine Zeiten relaxiert das System zunächst auf einer kleinen Zeitskala ins untere Minimum. Dann setzt ein Strom zwischen den beiden Minima des Ginzburg-Landau Potentials ein. Dies dauert solange an, bis sich nahezu alle Realisierungen im oberen Maximum befinden. Anschließend herrscht ein stabiles Gleichgewicht, bei dem sich im zeitlichen Mittel die Zahl der Realisierungen pro Minimum nicht mehr verändert.

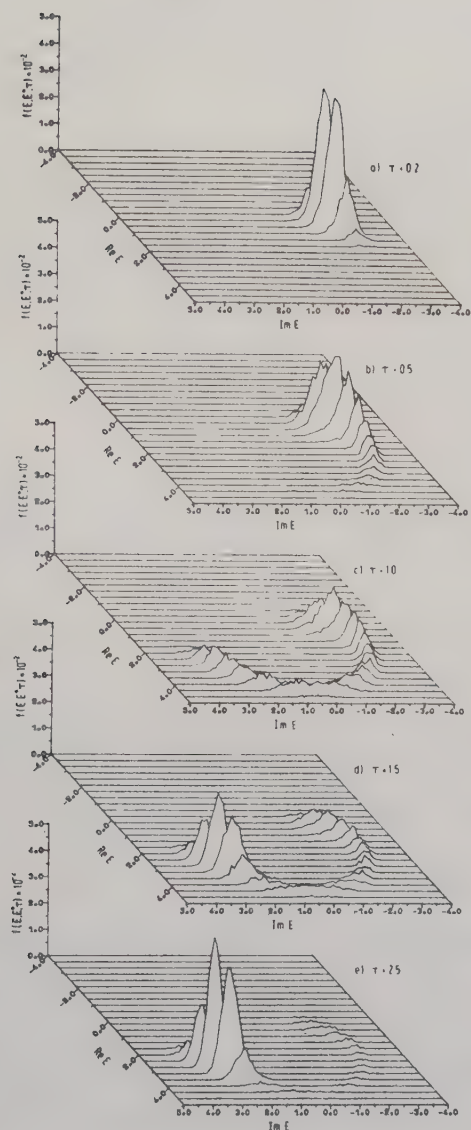


Abbildung 17. Zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung f für verschiedene Zeiten τ nach der Preparierung des Systems im unteren Ast der Hysterese /Schmidt 83/.

Eine anschauliche Vorstellung vom dynamischen Verhalten erhält man auch, wenn man bei diesen Stabilitätsuntersuchungen, den Real- gegen den Imaginärteil des elektrischen Feldes aufträgt.

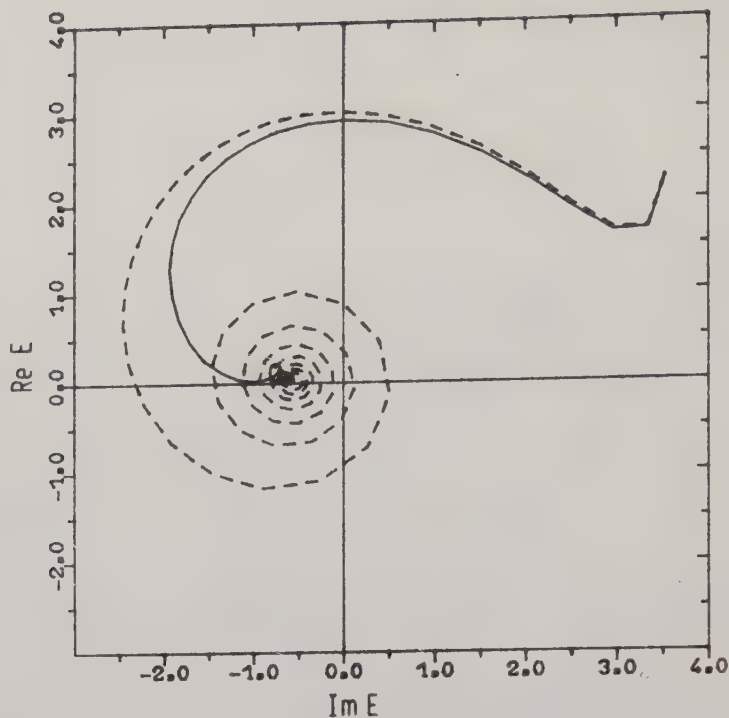


Abbildung 18. Der Realteil als Funktion des Imaginärteils des elektrischen Feldes:

Die gestrichelte Kurve stellt das deterministische und die durchgezogene Kurve das über 1000 Realisierungen gemittelte Verhalten des Systems dar /Schmidt 83/.

Dazu schaltet man beispielsweise die einfallende Intensität I_0 von einem Wert oberhalb auf einen Wert unterhalb des bistabilen Bereichs. Die einzelnen Realisierungen müssen dann aus dem oberen in das untere Maximum relaxieren. Die gestrichelte Kurve kennzeichnet dabei die deterministische Lösung, die in das weite, runde Minimum des unteren Astes hineinspiralt. Die durchgezogene Linie ist durch die gemittelte Intensität gegeben und folgt zuerst der deterministischen Lösung, um anschließend direkt in den neuen stabilen Zustand über zu gehen. Ein ähnliches Resultat hat Hanamura mit Hilfe einer Dichtematrixformulierung gewonnen /Hanamura 81/.

Es ist noch interessant, die Reaktion des Systems auf einen äußeren, sich zeitlich verändernden Puls kennenzulernen.

Dazu schaltet man das System mit einem linearen Puls der Form

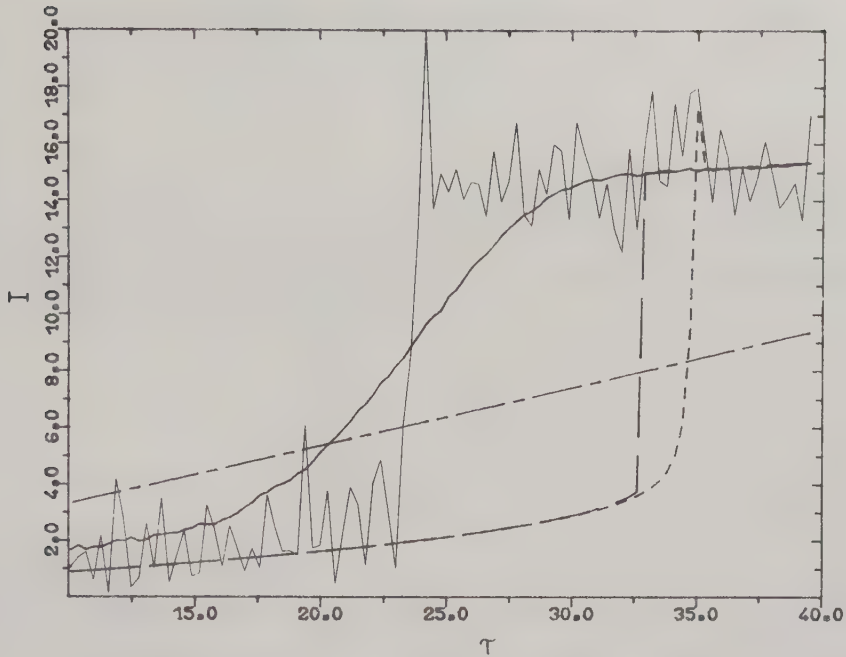


Abbildung 19. Herunterschalten mit einem Puls:

Als Funktion der Zeit sind aufgetragen :

Zeitabhängige Eingangsintensität $I_0(t)/100$
 (Strich-Punkt), Quasiinstantane Lösung $I(I_0)$ (lang
 gestrichelt), deterministische Lösung (kurz
 gestrichelt), eine typische Realisierung (dünne
 Linie), und der Mittelwert $\langle I \rangle$ über 1000
 Realisierungen (dicke Linie)

$I_{0,i}=2178$, $I_{0,f}=125$, $t_c=100$ /Schmidt 83/.

$$I_0(t) = \begin{cases} I_{0,i} + (I_{0,f} - I_{0,i})t/t_c & t \leq t_c \\ I_{0,f} & t > t_c \end{cases} \quad (4.53)$$

In Abbildung 20 sind zur Illustration die Ergebnisse für $t_c=100$, $I_{0,i}=125$ und $I_{0,f}=2178$ aufgetragen.

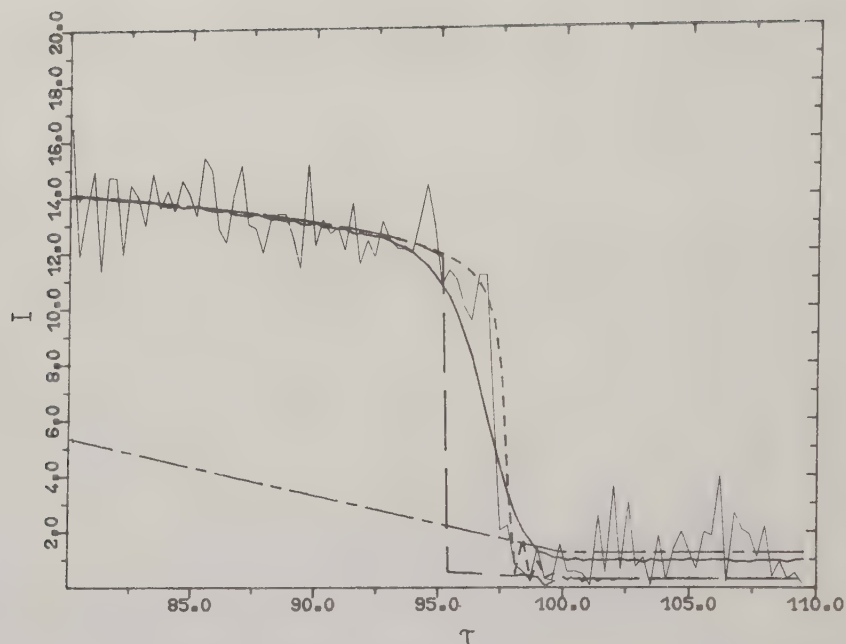


Abbildung 20. Hochschalten mit einem Puls:

Als Funktion der Zeit sind aufgetragen :

Zeitabhängige Eingangsintensität $I_0(t)/100$
 (Strich-Punkt), Quasiinstantane Lösung $I(I_0)$ (lang
 gestrichelt), deterministische Lösung (kurz
 gestrichelt), eine typische Realisierung (dünne
 Linie), und der Mittelwert $\langle I \rangle$ über 1000
 Realisierungen (dicke Linie)

$I_{0,i}=125$, $I_{0,f}=2178$, $t_c=100$ /Schmidt 83/.

Betrachtet man nun die Situation des Hochschaltens. Hier folgt die deterministische Lösung (kurz gestrichelt) zunächst der instantanen Lösung (lang gestrichelt) bis zum Ende des unteren Astes, verharnt dann infolge der Trägheit des Systems noch einige Zeit unten und springt dann auf den oberen Ast. Die gemittelte Intensität (dick ausgezogen) liegt zuerst aufgrund der Verschiebung des Mittelwertes durch Fluktuationen etwas oberhalb der deterministischen Lösung und steigt dann kontinuierlich in den oberen Zustand an. Die dünn gestrichelte Linie kennzeichnet eine typische Realisierung. Man sieht, daß sie sich zunächst auf dem unteren Ast befindet und dann plötzlich nach oben springt. Dieses Verhalten tritt auf,

weil sich die Potentialschwelle als Funktion des Feldes (Strich Punkt) langsam absenkt und immer mehr Realisierungen in das tiefere, stabilere Minimum springen und dort bleiben. Die Lage des Mittelwertes zwischen den beiden Zuständen gibt an, wie sich die Realisierungen auf die beiden Zustände verteilen.

Im Falle des Herunterschaltens, findet man nur kleine Abweichungen zwischen der deterministischen und der stochastischen Lösung der Intensität. Dieses Verhalten beruht auf der langen Lebensdauer des oberen Astes (Abbildung 19).

4.1.3 DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Bevor nun im weiteren die an CuCl durchgeführten Experimente diskutiert werden, stelle ich noch einmal kurz die gewonnenen Ergebnisse zusammen:

Bei der optischen Bistabilität in CuCl handelt es sich um eine dispersive optische Bistabilität. Die Hystereseschleifen werden deshalb bei Annäherung der einfallenden Energie an die Resonanzenergie größer und verschwinden in der Nähe der Resonanz. Aus den Untersuchungen des deterministischen Systems muß der Transmissionskoeffizient möglichst groß gewählt werden ($R \approx 0.9$), damit optische Bistabilität überhaupt auftritt. Für einen $1\mu\text{m}$ dicken CuCl-Kristall findet man eine Schaltintensität zwischen 0.3 (diese Rechnung) und 2 MW/cm^2 (Hanamura). Durch den Einfluß von Fluktuationen wird der untere Ast destabilisiert, während der obere Ast seine Form beibehält.

Vergleicht man nun diese Erwartungen mit den experimentellen Ergebnissen der Messungen von Levy et al und von Peyghambarian et al ergibt sich das folgende Bild /Levy 83, Peyghambarian 83/.

Die natürliche Reflektivität der CuCl Oberfläche reichte bei den Experimenten nicht aus, um optische Bistabilität direkt zu messen. Deshalb wurde in beiden Experimenten die Oberflächen künstlich verspiegelt. Die Probendicke mußte größer als $10\mu\text{m}$ und die Schaltintensität in der Größenordnung von einigen 10 MW/cm^2 gewählt werden. Diese beiden unerwarteten Werte lassen sich aber aufgrund einer Modellrechnung von Sarid et al verstehen, in der die nichtsättigbare Untergrungsabsorption des exzitonischen Ausläufers und die intensitätsabhängige Resonanzverbreiterung des

Biexzitons berücksichtigt werden /Sarid 83/. Da die Untergrundsabsorption die Rückkopplungseigenschaften des Fabry- Perot- Resonator zerstört, verschiebt sich die Beobachtbarkeit der optischen Bistabilität, die maßgeblich diese Rückkopplungseigenschaften ausnutzt, zu höheren Intensitäten.

Die Frequenzabhängigkeit der optischen Bistabilität ist in Abbildung 21 nach Levy dargestellt.

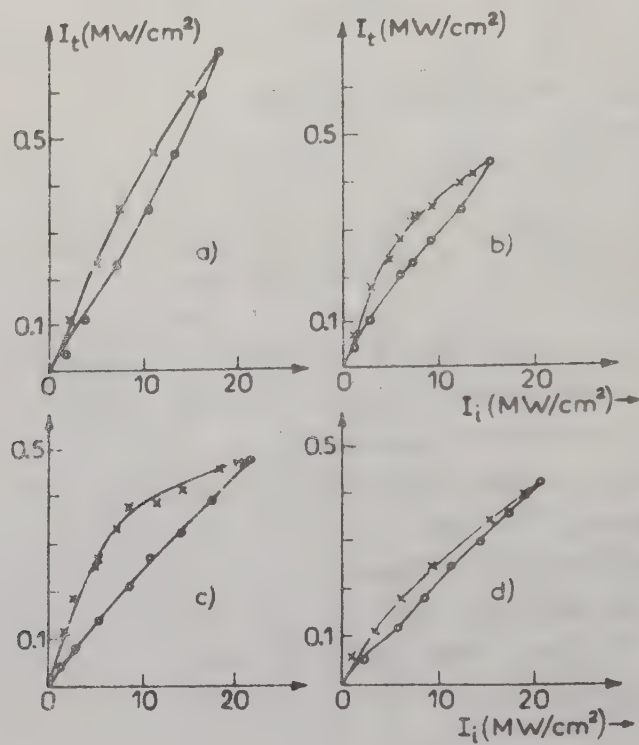


Abbildung 21. Frequenzabhängigkeit der optischen Bistabilität für verschiedene Laserenergien E_L in der Nähe der halben Biexzitonenergie ($\omega_{xx}/2=3.186\text{eV}$):

a) $E_L=3.1859\text{eV}$, b) 3.186eV , c) 3.1861eV , d) 3.1862eV
/Levy 83/

Wie erwartet, werden die Hystereseschleifen umso größer, je mehr man sich mit der Laserfrequenz der Biexzitoneneresonanz nähert. Überraschend ist die deutlich ausgeprägte Hystereseschleife oberhalb der Resonanz. Für diesen Effekt dürfte das Anwachsen der Resonanzfrequenz mit der Temperatur verantwortlich sein, da durch die hohen einfallenden Intensitäten der Kristall wahrscheinlich aufgeheizt wurde. Die Form der Hystereseschleife verhält sich genauso, wie man es aufgrund des Einflusses der Fluktuationen erwarten konnte. Die experimentellen Ergebnisse von Peyghambarian zeigen das gleiche Verhalten, mit Ausnahme der Existenz der Hystereseschleife oberhalb der Resonanz. Dieses Experiment zeigt die erwartete Frequenzabhängigkeit der optischen Bistabilität.

4.2 OPTISCHE BISTABILITÄT AUFGRUND EINER INDUZIERTEN ABSORPTION

Im letzten Abschnitt wurde die optische Bistabilität ausführlich untersucht, bei der die Nichtlinearität aufgrund der Biexzitonenerzeugung ausgenutzt wird. Nach dieser dispersiven Bistabilität soll nun in diesem Abschnitt der Grenzfall einer rein absorptiven optischen Bistabilität diskutiert werden.

Absorptive optische Bistabilität kann aufgrund von zwei unterschiedlichen optischen Nichtlinearitäten entstehen:

a) der Sättigung oder b) der Induktion einer Absorption. In der Literatur wurde bislang fast ausschließlich Fall a diskutiert /Szöke 69, McCall 74, Bonifacio 78b, Erneux 83/. Diese Untersuchungen der absorptiven optischen Bistabilität gehen alle von den Maxwell-Bloch-Gleichungen (3.10, $\Delta=0$) aus. Die Dynamik dieses Modells wurde dabei ausführlich von Erneux und Mandel behandelt /Mandel 82a,b, Erneux 83/. Experimentell wurde diese absorptive optische Bistabilität von Rosenberger et al mit Na-Dampf realisiert /Rosenberger 83/.

Daran anschließend versuchte man experimentell absorptive optische Bistabilität auch an Halbleiterkristallen zu beobachten. Man untersuchte vornehmlich die Sättigung der exzitonischen Absorption. Allerdings beobachtete man anstelle der erwarteten absorptiven Bistabilität eine in erster Linie disperse optische Bistabilität /Gibbs 79/. Mit ein Grund dafür sind die starken dispersiven Änderungen, die mit dem Ausbleichen der

exzitonischen Resonanz verbunden sind. Erst als man Kristalle untersuchte, die in dem jeweils relevanten Frequenzbereich nur geringe dispersive Änderungen zeigten, konnte auch absorptive optische Bistabilität gefunden werden. Diese war jedoch nicht durch das Ausbleichen einer Resonanz bedingt, sondern durch zunehmende lichtinduzierte Absorption. Mit den Messungen von Rossmann et al und Bohnert et al konnte speziell Bistabilität in CdS aufgrund induzierter Absorption erstmals nachgewiesen werden /Rossmann 83, Bohnert 83/. Wesentlich an dieser Variation der optischen Bistabilität ist, daß sie nicht der externen Rückkopplung eines Resonators bedarf. Sie kann vielmehr als eine intrinsische Instabilität angesehen werden und unterscheidet sich damit grundlegend von der Bistabilität durch ausbleichende Absorption, die eine externe Resonatorrückkopplung benötigt. Später konnte absorptive optische Bistabilität durch induzierte Absorption auch unter anderen Bedingungen nachgewiesen werden /Dagenais 84a, Miller 84, Wherrett 84/. In diesen Fällen handelt es sich um thermische Effekte, bei denen die treibende Nichtlinearität die Temperaturabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten ist.

Im weiteren diskutiere ich die theoretische Beschreibung der optischen Bistabilität aufgrund einer induzierten Absorption. Diese entsteht in den untersuchten Modellsystemen durch eine Absenkung der Bandkante bei zunehmender Laseranregung des Kristalls. Bedingt durch diesen Effekt steigt die Absorption im Spektralbereich unterhalb der unrenormierten Bandkante von niedrigen auf hohe Werte an. In einem Halbleiterkristall wird die Bandkante aufgrund der Renormierung der Einteilchenenergien durch Bildung einer hohen Dichte von e-h Paaren abgesenkt. Für diese Diskussion soll angenommen werden, daß die Temperatur des elektronischen Systems während des Experimentes näherungsweise konstant bleibt. Diese Annahme ist im Falle von sehr kurzen Pulsanregungen ($< 1-10$ ns) gerechtfertigt. Die thermisch bedingte Lückenanregung wird daran anschließend separat diskutiert. Für den Fall der Lückenrenormierung durch e-h Paarerzeugung wird zunächst die dielektrische Funktion näherungsweise bestimmt. Daran anschließend wird das stationäre und dynamische Verhalten dieser absorptiven optischen Bistabilität untersucht.

Die dielektrische Funktion

Regt man einen Kristall mit Licht an, dessen Frequenz sich unterhalb der

exzitonischen Resonanzen befindet, können Photonen nur durch Zweiphotonenabsorption oder über den Urbachausläufer der Bandkante absorbiert werden. Diese angeregten Exzitonen schirmen sich mit wachsender Dichte immer besser ab, bis ein e-h Plasma entsteht. Aufgrund von Austausch- und Korrelationseffekten wird die Bandkante abgesenkt. Entspricht die reduzierte Bandkante nun der Energie des Lasers, setzt eine starke Einphotonenabsorption ein. Die diesen physikalischen Prozess beschreibende dielektrische Funktion ε wird nun aufgestellt.

Die dielektrische Funktion kann im allgemeinen durch die Polarisationsfunktion $P_{eh}(k, k', \omega)$ ausgedrückt werden. Im Rahmen eines Zwei-Band-Modells ergibt sich dafür die Beziehung /Haug 82b/

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} - 8\pi e^2 m_0^{-2} \sum_{k, k'} M_{vc}(k) M_{vc}^*(k') P_{eh}(k, k', \omega) \quad (4.54)$$

Die optischen Matrixelemente M_{vc} lassen sich in Bandkantennähe durch k.p Störungstheorie approximieren /siehe Schmitt-Rink 82/

$$M_{vc}(k) = (m_0^2 / 2mE_g')^{1/2} E_g' / (E_g' + k^2 / 2m) \approx (m_0^2 / 2mE_g')^{1/2} E_g' / \omega \quad (4.55)$$

m_0 und m sind dabei die freie Elektronenmasse beziehungsweise die reduzierte Masse des e-h Plasmas. E_g' ist die reduzierte, renormierte Bandkante.

Da für die hier betrachtete, induzierte Absorption nur die Reduktion der Bandkante wichtig ist, werden in der Polarisationsfunktion andere Vielteilcheneffekte vernachlässigt und nur die renormierten Einteilchenpropagatoren verwendet.

$$P_{eh}(k, k', \omega) \approx P_{eh}^0(k, k', \omega) = (1 - f(\varepsilon_e) - f(\varepsilon_h)) \delta_{k, k'} / (\omega - E_g - k^2 / 2m - \Delta(N) + i\delta) \quad (4.56)$$

wobei $f^{-1}(\varepsilon_i) = 1 + \exp(\beta[\varepsilon_i - \mu_{0,i}])$ die Fermiverteilung mit der Einteilchenenergie $\varepsilon_i = k^2 / 2m_i$ ist. Die quasi-chemischen Potentiale $\mu_{0,i}$ werden durch die Paardichte $N = 2 \sum f_i(\varepsilon_i)$ bestimmt. Die in diesem Modell auftretenden Austausch- und Korrelationseffekte werden durch eine starre Bandkantenverschiebung $\Delta(N)$ berücksichtigt, die an das Ergebnis von Rösler und Zimmermann angepaßt wird /Rösler 77/. Dabei findet man im Grenzfall

niedriger Dichte eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Ergebnissen von Thuselt /Thuselt 83/. In seiner Rechnung berücksichtigt er jedoch nicht den Einfluß der optischen Phononen, die bei hohen Dichten zu Korrekturen bei der Bandkantenabsenkung führen. Der Fit für die Dichteabhängigkeit der Bandkantenverschiebung ist an das Ergebnis von Rösler und Zimmermann angepaßt worden und lieferte

$$\Delta(N) = -E_b [4.77898 (a_0^3 N)^{0.25} + 2(a_0^3 N)^{0.5}] . \quad (4.57)$$

Die exzitonische Bindungsenergie ist durch $E_b = e^2 / 2a_0 \epsilon_0$ mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \epsilon_0 / m e^2$ gegeben.

In Abbildung 22 sind das chemische Potential $\mu = \mu_{0,e} + \mu_{0,h} + \Delta(N)$ und die renormierte Bandlücke $E_g' = E_g^0 + \Delta_{LO} + \Delta(N) = E_g + \Delta(N)$ als Funktion der e-h Paardichte N für einen 1µm dicken CdS-Kristall bei einer Temperatur von T=30K, mit einer polaronischen Verschiebung von $\Delta_{LO} = -79\text{meV}$, dargestellt. Um die Absorption unterhalb der Bandkante zu approximieren wird eine phänomenologische Dämpfungskonstante γ eingeführt. Der Absorptionskoeffizient $\alpha(\omega)$ ergibt sich aus der dielektrischen Funktion ϵ durch

$$\alpha(\omega) = \omega \text{Im}(\epsilon) / [c n(\omega)] . \quad (4.58)$$

Paßt man nun alle Zwischenergebnisse (4.54-4.58) zusammen, findet man für den dichteabhängigen Absorptionskoeffizienten

$$\alpha(\omega, N) \approx (2e^2 / \pi c) E_g' / \omega \sqrt{(2m / \epsilon_\infty)} \gamma \int dx \sqrt{x} (1 - f_e - f_h) / [(\omega - x - E_g')^2 + \gamma^2] . \quad (4.59)$$

In Abbildung 23 ist die Absorption für CdS als Funktion der e-h Paardichte N bei einer festen Frequenz von $\omega = 2.548\text{eV}$ aufgetragen /Koch 84b/.

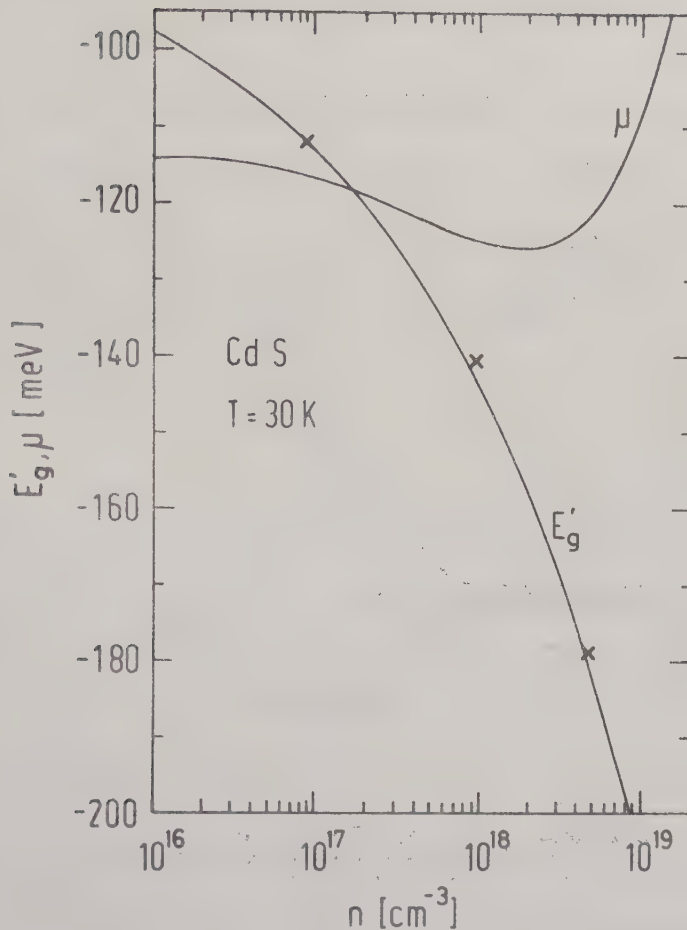


Abbildung 22. Chemische Potential μ und reduzierte Bandlücke E'_g : (relativ zur unrenormierten Bandlücke E_g^0) als Funktion der e-h Paar-Dichte N für CdS. Die Kreuze sind die Ergebnisse von /Rösler 77/.

Die Kurve zeigt für kleine Dichten einen schwachen Ausläufer der Absorption ($N \leq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$). Setzt dann die starke Einphotonenabsorption ($E_g \approx \omega$) ein, steigt die Absorption stark an. Bei hohen Dichten wird der Kristall ausgebleicht ($\mu(N) = \omega$).

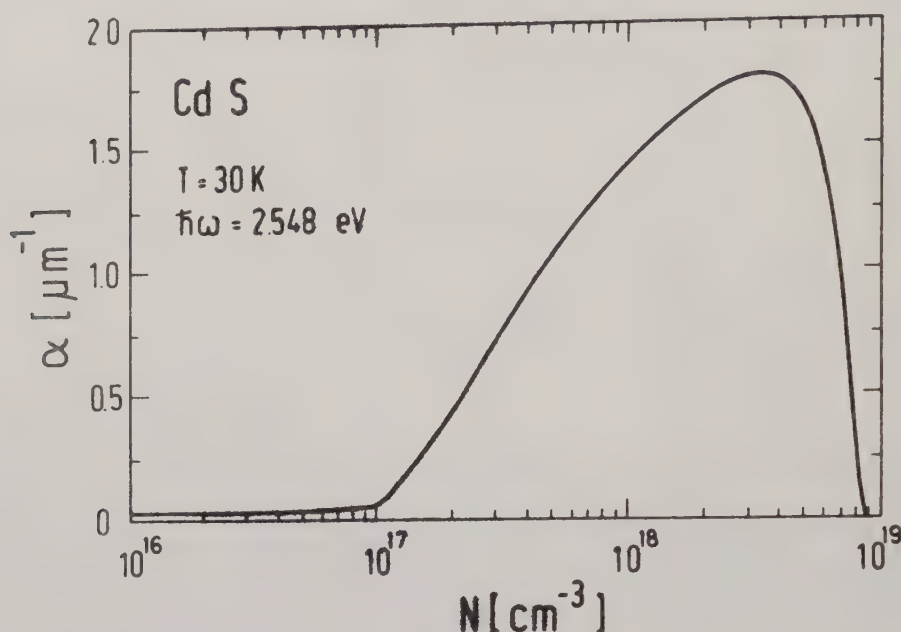


Abbildung 23. Die Absorption als Funktion der Dichte /Koch 84b/

Die Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichung für die e-h Paardichte N ist durch

$$\partial_t N - \partial_z D \partial_z N = -N/\tau + \alpha(\omega, N) I / \omega \quad (4.60)$$

gegeben, wobei I die Intensität des Lichtfeldes, D die Diffusionskonstante und τ die Lebensdauer der e-h Paare ist /Toyozawa 78/. Sie kann auch im Rahmen einer Vielteilchentheorie hergeleitet werden, falls spontane Prozesse vernachlässigt werden /Haug 84/. Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Dichte durch diffusive Veränderungen, Rekombinationsverluste und Gewinne aufgrund der Absorption. Im stationären Grenzfall führt diese Gleichung zu einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen der Intensität und der Dichte, wenn man den speziellen Ausdruck der Absorption aus Gleichung (4.59) verwendet. Wie im weiteren gezeigt wird, ist diese Nichtlinearität die Ursache für eine Populationsinstabilität,

die zu optischer Bistabilität führt. Im folgenden ist noch die Transportgleichung der Intensität herzuleiten. Diese gewinnt man aus den Maxwell'schen Gleichungen, aus denen die Transportgleichung der Energiestromdichte S als

$$\operatorname{div} S + [E' \partial_t (\epsilon_\infty E' + 4\pi P) + H' \partial_t H'] / 4\pi = 0 \quad (4.61)$$

folgt. S ist dabei der Poyntingvektor

$$S = c(E' \times H') / 4\pi. \quad (4.62)$$

Die zeitabhängige Polarisation P hängt über die dielektrische Funktion mit dem elektrischen Feld durch

$$P'(z, t) = \int d\tau dx \chi(x, \tau) E'(z-x, t-\tau) = [\epsilon(-i\partial_z, i\partial_t) - \epsilon_\infty] E'(z, t) / 4\pi \quad (4.63)$$

zusammen. Für das elektrische Feld und die Polarisation findet man mit dem Ansatz langsam variierender Amplituden

$$\begin{aligned} E'(z, t) &= \exp(i(kz - \omega t)) E(z, t) + k.k. \\ P'(z, t) &= \exp(i(kz - \omega t)) \{ \epsilon(k, \omega) - \epsilon_\infty + i\partial_\omega [\epsilon(k, \omega) - \epsilon_\infty] \partial_t \} E(z, t) / 4\pi + k.k. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dabei wurde die Polarisation in einer Potenzreihe des zeitlichen Gradienten entwickelt. Räumliche Dispersion wurde vernachlässigt. In dieser Näherung ergibt sich das Magnetfeld zu

$$H'(z, t) = \exp(i(kz - \omega t)) [\sqrt{\epsilon} E(z, t) + O(\partial)] + k.k. \quad (4.65)$$

Da man nur im zeitlichen Mittel am Energietransport interessiert ist, wird der Poyntingvektor gemittelt und man erhält daraus die Intensität als

$$\langle S \rangle = cn / 8\pi |E|^2 e^{-\alpha z} = I, \quad (4.66)$$

mit $n = \text{Re} \sqrt{\epsilon}$. Die rechte Seite von Gleichung (4.61) wird zu

$$E' \partial_t D + H' \partial_t H = \frac{1}{2} \partial_t (\epsilon_\infty E'^2 + H'^2) + 4\pi E' \partial_t P' \quad (4.67)$$

umgeformt und ergibt die Bilanzgleichung der Intensität, wenn man annimmt, daß die Energie des Mediums in Form einer Bilinearform in der Polarisierung vorliegt

$$\partial_z I + [(\epsilon_\infty + |\epsilon| + |\partial_\omega \omega(\epsilon - \epsilon_\infty)|) / 2cn] \partial_t I + \alpha I = 0. \quad (4.68)$$

Die Annahme, daß die Energie als eine quadratische Form in der Polarisierung ausgedrückt werden kann, ist exakt, wenn die Polarisierung des Mediums durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit beschrieben werden kann (vgl. dazu Abschnitt 4.1). Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Intensität nicht mit der Phase des elektrischen Feldes koppelt. Die Energiegeschwindigkeit v_E ist durch diese Herleitung als

$$v_E = 2cn / [\epsilon_\infty + |\epsilon| + |\partial_\omega \omega(\epsilon - \epsilon_\infty)|] \quad (4.69)$$

definiert. Dieser Ausdruck ist eine Verallgemeinerung des Ergebnisses in CnCl (4.17) (Spezialfall einer harmonischen Polarisierung). Die beiden ersten Terme des Nenners bestimmen die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes, während der letzte Summand die Energiedichte des Kristalls darstellt. Die resultierende Energiegeschwindigkeit ist für CdS in Abbildung 24 aufgetragen. Solange sich die Laserenergie unterhalb der Bandkante befindet, bleibt die Energiegeschwindigkeit nahezu konstant. Erst wenn die Dichte der e-h Paare größer als 10^{17} cm^{-3} ist, setzt eine starke Einphotonenabsorption ein und die Energiegeschwindigkeit fällt deshalb stark ab. Mit ausbleichender Absorption steigt auch die Energiegeschwindigkeit wieder an. Die Verschiebung der beiden Extrema von Absorption und Energiegeschwindigkeit in der Dichte wird von der kristallinen Energiedichte verursacht.

Die zeitliche Änderung der Intensität ist durch den räumlichen Transport der Intensität und durch die Verluste aufgrund der Absorption gegeben.

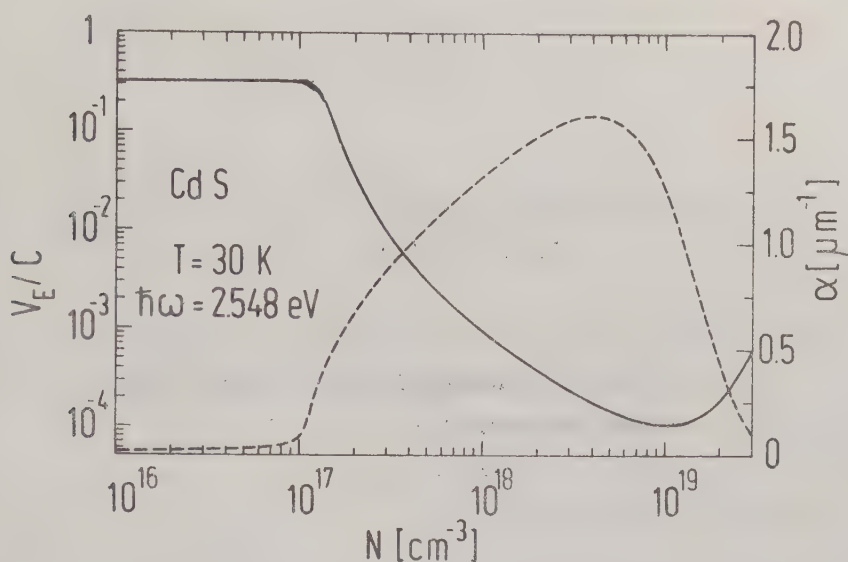


Abbildung 24. Die Energiegeschwindigkeit (durchgezogen) und die Absorption (gestrichelt) als Funktion der Dichte

Die dielektrische Funktion hängt über die Dichte noch implizit von Ort und Zeit ab. Bei der Herleitung der Transportgleichung wurden diese Gradienten der dielektrischen Funktion vernachlässigt.

Die beiden gekoppelten Bilanzgleichungen (4.60) und (4.68) beschreiben zusammen, die Dynamik eines e-h Plasmas und des Lichtfeldes in einem CdS-Kristalls für die langsam veränderliche Amplitude des elektrischen Feldes. Da die Rekombinationslebensdauer des e-h Plasmas in CdS in der Größenordnung von 0.1 ns liegt, während die effektive Relaxationszeit der Intensität in der Größenordnung von 0.1 ps liegt, paßt sich die Intensität adiabatisch der im Kristall vorhandenen Dichte an. Die zeitliche Abhängigkeit der Intensität kann deshalb vernachlässigt werden. Die Bilanzgleichungen lauten dann :

$$\partial_t N - \partial_z D \partial_z N = -N/\tau + \alpha(\omega, N) I / \omega \quad (4.70)$$

und

$$\partial_z I = -\alpha I .$$

(4.71)

4.2.1 DIE STATIONÄRE LÖSUNG

Eine erste Vorstellung über die Art der zu erwartenden Lösungen gewinnt man, wenn man die beiden gekoppelten Bilanzgleichungen in verschiedenen Grenzfällen stationär untersucht.

A) Der Grenzfall großer Diffusion

In diesem Grenzfall ($D\tau\alpha^2 \gg 1$) verteilt sich die Dichte N nahezu homogen über die gesamte Länge des Kristalls und die Intensität fällt dann exponentiell im Kristall ab. In der näherungsweisen Beschreibung dieses Falles geht man zu einer räumlich gemittelten Dichte über. Die gemittelte Intensität

$$\langle I \rangle = \int I(z) dz / L$$

(4.72)

bestimmt sich aus Gleichung (4.71) als

$$\langle I \rangle = T I_0 (1 - e^{-\alpha L}) / \alpha L .$$

(4.73)

$T=1-R$ ist der Transmissionskoeffizient und I_0 ist die Eingangsintensität. Die transmittierte Intensität resultiert aus (4.71) zu

$$I_t = T^2 I_0 e^{-\alpha L}$$

(4.74)

Mittelt man noch die Bilanzgleichung der Dichte (4.70) erhält man die Transportgleichung

$$\partial_t N = -N/\tau + TI_0(1 - e^{-\alpha L})/Lw = K(N) \quad (4.75)$$

Das stationäre Verhalten dieser Bilanzgleichung wird nun für einen CdS Kristall untersucht.

$$\begin{aligned} E_g &= E_g^0 + \Delta_{LO} = 2.583 \text{ eV} \\ \epsilon_\infty &= 8 \\ m_e &= 0.205 m_0 \\ m_h &= 1.1 m_0 \\ \tau &= 0.1 \text{ ns} \\ T &= 0.77 \\ \gamma &= 0.6 \text{ meV} \\ L &= 1 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Abbildung 25. Die verwendeten Materialparameter für CdS

Aus der stationären Bilanzgleichung (4.75) resultiert die Dichte als Funktion der Eingangsintensität. Dies ist in Abbildung 26 aufgetragen.

In einem Intensitätsbereich zwischen $300 \leq I_0 \leq 850 \text{ kW/cm}^2$ findet man ein mehrdeutiges Verhalten der Dichte und der transmittierten Intensität als Funktion des Eingangsfeldes. Die Stabilität dieser drei Zustände gegenüber Fluktuationen wird untersucht, indem man zur Bilanzgleichung (4.75) eine stochastische Kraft addiert. Die entsprechende Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung f dafür N e-h Paare zu finden, lautet

$$\partial_t f = -\partial_N K(N) f + (Q/2) \partial_N^2 f \quad (4.76)$$

Diese Gleichung kann im stationären Fall durch den Ansatz

$$f_{st} = \exp(-2\Phi/Q) \quad (4.77)$$

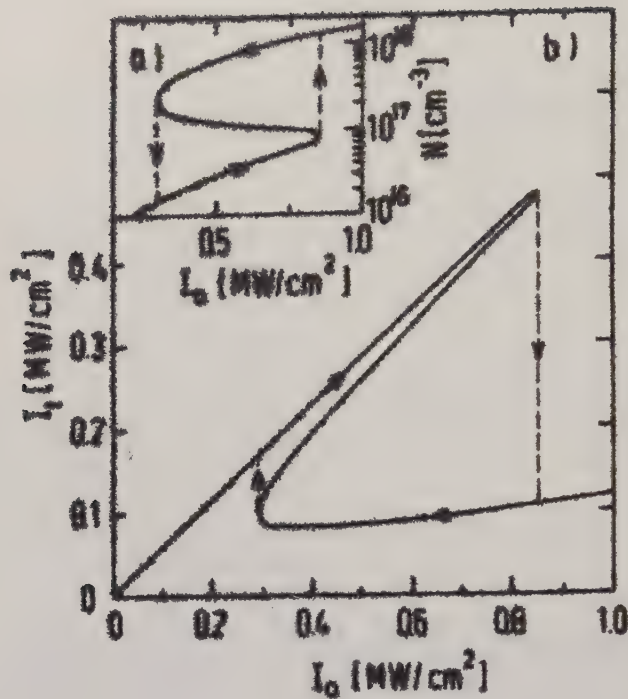


Abbildung 26. Die transmittierte Intensität I_t und die Dichte N als Funktion der Eingangsintensität I_0 ($D=10$) /Koch 84a/

gelöst werden. Das stationäre Ginsburg- Landau- Potential Φ resultiert dabei zu

$$\begin{aligned} \Phi(N) &= - \int dn K(n) \\ &= N^2 / 2\tau - T I_0 / L_0 (N - \int dn e^{-a(n)L_0}) . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Das Potential Φ ist für verschiedene Eingangsintensitäten in Abbildung 27 aufgetragen.

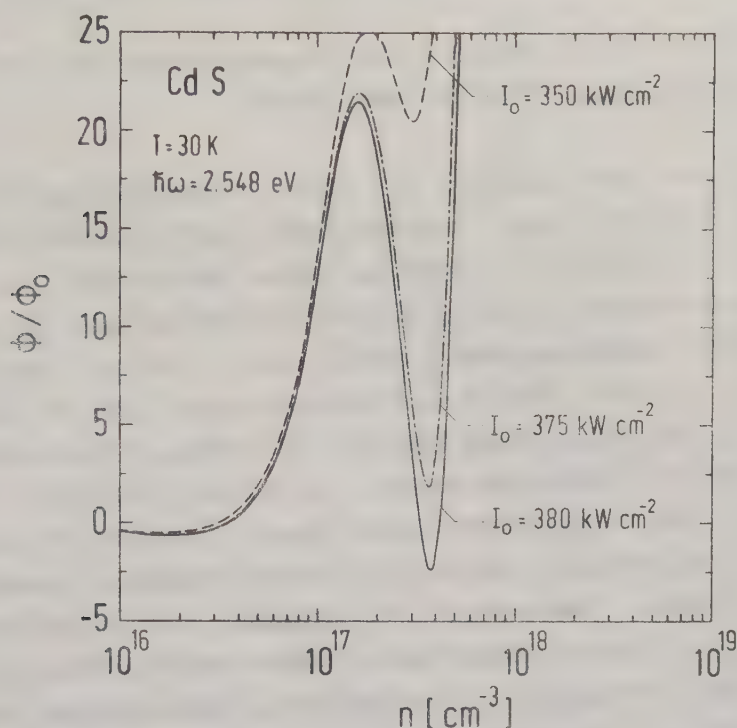


Abbildung 27: Ginzburg-Landau-Potential für verschiedene Eingangsintensitäten /Schmidt 84/

Die Dichtewerte des unteren und des oberen Astes entsprechen den Werten der beiden relativen Minima des Potentials. Diese Zustände sind deshalb stabil oder metastabil. Der mittlere Ast hingegen entspricht dem Maximum des Potentials und ist dementsprechend gegen äußere Fluktuationen instabil.

Betrachtet man nun den Zusammenhang zwischen der einfallenden und der transmittierten Intensität (4.75). Die transmittierte Intensität steigt zunächst an, bis die Dichte das Ende des Regimes niederer Dichte erreicht hat, und fällt dann auf einen Zustand niedriger Transmission ab. Die dazugehörige Hystereseschleife wird im Uhrzeigersinn durchlaufen.

B) Der Grenzfall einer verschwindenden Diffusionskonstanten

Die Hystereseschleife zwischen der Eingangsintensität und der Dichte existiert in diesem Fall ($D=0$) nur noch lokal.

Regt man einen CdS-Kristall mit einer Intensität an, die oberhalb des bistabilen Bereichs liegt, befindet sich die Dichte am Kristallanfang auf einem Wert, der dem des bistabilen Astes entspricht. In diesem Bereich hoher Dichte existiert somit eine hohe Absorption und die Intensität nimmt mit wachsender Eindringtiefe in den Kristall solange stark ab, bis die lokale Dichte an einer Stelle des Kristalls das Ende des oberen Astes erreicht hat. An diesem Punkt erfolgt eine abrupte Dichteänderung auf den Wert des unteren bistabilen Astes. Es bildet sich somit im Kristall ein Dichteprofil aus. Qualitativ wurde dieser Sachverhalt numerisch untersucht. In Abbildung 28 ist das stationäre Ergebnis einer solchen Rechnung aufgetragen. Betrachten wir zunächst die Situation, in der im gesamten Kristall ein Zustand hoher Dichte vorherrscht, d.h. es liegt der Fall sehr hoher Anregung vor, so daß der gesamte Kristall auf den Zustand hoher Absorption geschaltet wurde. Reduziert man nun die Eingangsintensität, bildet sich mit abnehmender Intensität eine Dichtefront am Kristallende aus. Verringert man die Eingangsintensität weiter, wandert die Dichtefront langsam in Richtung Kristallanfang. Während dieser Bewegung der Front bleibt die Intensität am Kristallende nahezu konstant, da im Zustand niedriger Dichte die Intensität nur schwach abgeschwächt wird. Eine Änderung der Intensität läßt deshalb nur die Dichtefront in den Kristall wandern. Die Stelle an der sich die Dichtefront befindet, bezeichnet man als die Eindringtiefe der Dichtefront. Erst wenn sich im ganzen Bereich ein Zustand niedriger Dichte eingestellt hat, reduziert sich mit sinkender Eingangsintensität auch die transmittierte Intensität wieder stärker. Der gerade diskutierte Fall ist in Abbildung 28 durch die durchgezogene Kurve dargestellt. Die gleichzeitig eingezeichneten gestrichelten Kurven geben das Verhalten des Systems wieder, wenn die Eingangsintensität langsam erhöht wird.

Bedingt durch die lokale Hysterese ergibt sich für die Situation einer ansteigenden Intensität eine andere Eindringtiefe als bei einer abfallenden Intensität. In Abbildung 29 ist die Eindringtiefe als Funktion der Eingangsintensität I_0 für einen ansteigenden (z_1) und einen abfallenden Puls (z_2) aufgetragen.

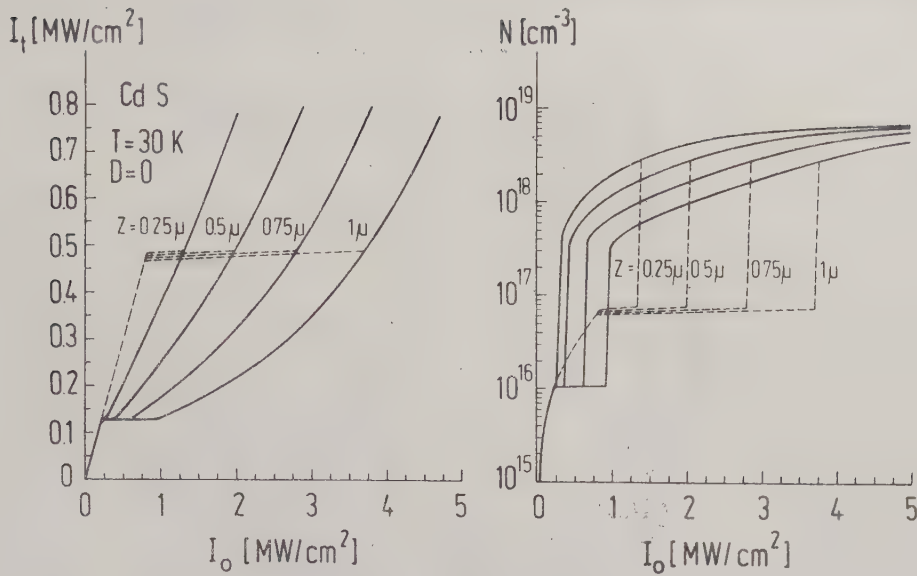


Abbildung 28. Transmittierte Intensität und Dichte als Funktion der Eingangsintensität für verschiedene Kristalldicken ($D=0$):
 Dargestellt ist das stationäre Verhalten für den Fall einer ansteigenden (gestrichelt) und einer abfallenden Intensität (durchgezogen).

Das Verhalten des Systems mit einer endlichen Diffusionskonstanten liegt zwischen den beiden erläuterten Grenzfällen.

Die gerade diskutierte Dichtefront trennt im Kristall die Bereiche niederer und hoher Dichte voneinander. Diese Koexistenz der beiden Dichtezustände ist typisch für einen Nichtgleichgewichtsphasenübergang erster Ordnung wie ihn die optische Bistabilität darstellt. Es gibt bei der optischen Bistabilität aber nicht nur longitudinale, sondern auch transversale und zeitliche Phasenkoexistenz.

Die transversale Phasentrennung wird besonders bei einer dispersiven Bistabilität wichtig, da longitudinal wegen der schwachen Absorptionsänderungen nur eine Phase auftritt (vgl. beispielweise /Haug 85/). Werden

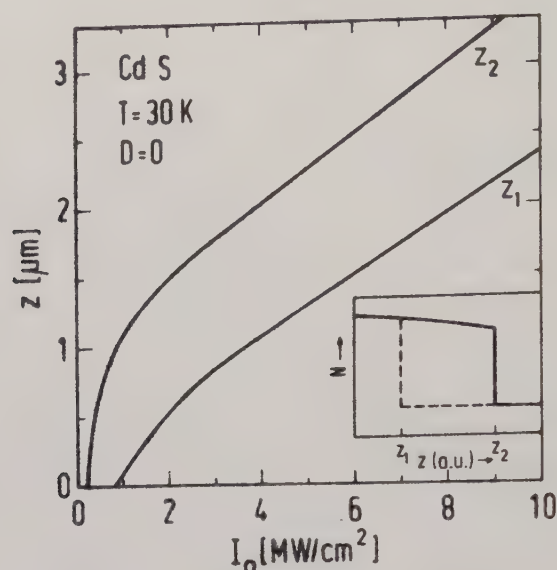


Abbildung 29. Eindringtiefe als Funktion der Eingangsintensität (z_1 für ansteigende und z_2 für fallende Intensität)

hingegen diese räumlichen Inhomogenitäten durch große Ladungsträgerdiffusion unterdrückt, zeigt die optische Bistabilität nur noch eine zeitliche Koexistenz (vgl. Kap. 4.1).

4.2.2 DIE DYNAMISCHE LOESUNG DER BILANZGLEICHUNGEN

In diesem Abschnitt soll nun das dynamische Verhalten der absorptiven Bistabilität diskutiert werden. Dies ist wichtig, um diese Theorie mit den Experimenten von Rossmann et al und Bohnert et al vergleichen zu können, in denen jeweils nur mit relativ kurzen Laserpulsen gearbeitet wurde. Wir nehmen für die folgenden Rechnungen an, daß die Eingangsintensität zeitlich variiert. Aus den resultierenden zeitabhängigen Ergebnissen wird die Hysteresese konstruiert, indem man die transmittierte Intensität zu jedem Zeitpunkt gegen den jeweiligen Wert der Eingangsintensität aufträgt. Die Zeit spielt in dieser Darstellungsart die Rolle eines Parameters.

Zur numerischen Lösung der Bilanzgleichungen wird eine zeitabhängige Eingangsintensität I_0 der Form

$$I_0(t)=I_{\max}\sin^2(\pi t/T_m) \tag{4.79}$$

verwendet.

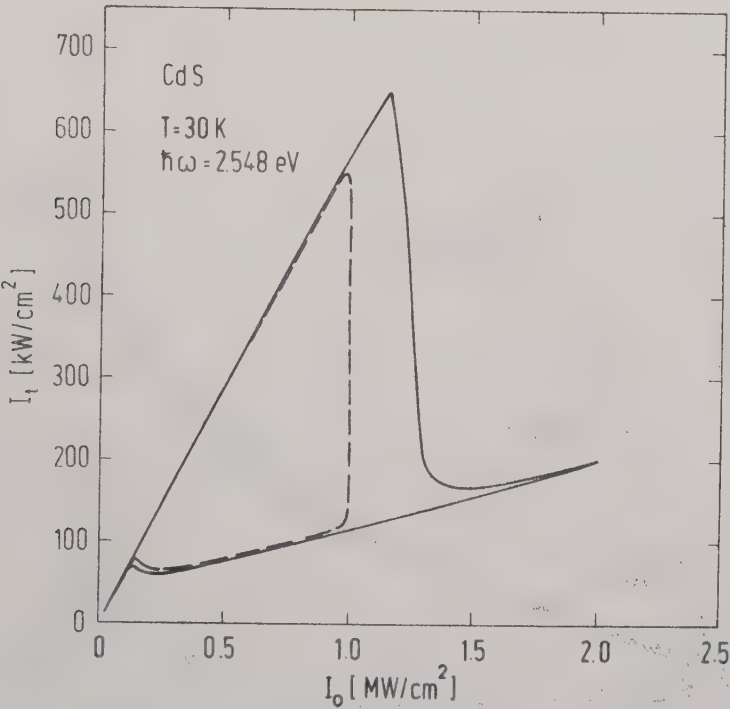


Abbildung 30. Transmittierte Intensität gegen die Eingangsintensität für verschiedene Eingangsintensitäten ($D=+\infty$) : mit $I_0^{\max}=0.95\text{MW}/\text{cm}^2$ (gestrichelte Linie) und mit $I_0^{\max}=2\text{MW}/\text{cm}^2$ (durchgezogene Linie) /Schmidt 84/.

Zunächst wird der einfachere Fall einer homogen verteilten Dichte behandelt. Dazu wird die Bilanzgleichung der gemittelten Dichte für verschied-

dene maximale Intensitäten aufintegriert. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abbildung 30 aufgetragen.

Mit einer Pulsbreite von 2ns wurden zwei verschiedene maximale Intensitäten untersucht. Mit wachsender Intensität schießt die dynamische Lösung immer stärker über die stationäre Hysteresis hinaus. Diese dynamischen Fehlanpassungseffekte sind dem intrinsischen bistabilen Verhalten überlagert.

Der Einfluß der Pulsbreite auf die Ergebnisse ist in Abbildung 31 dargestellt.

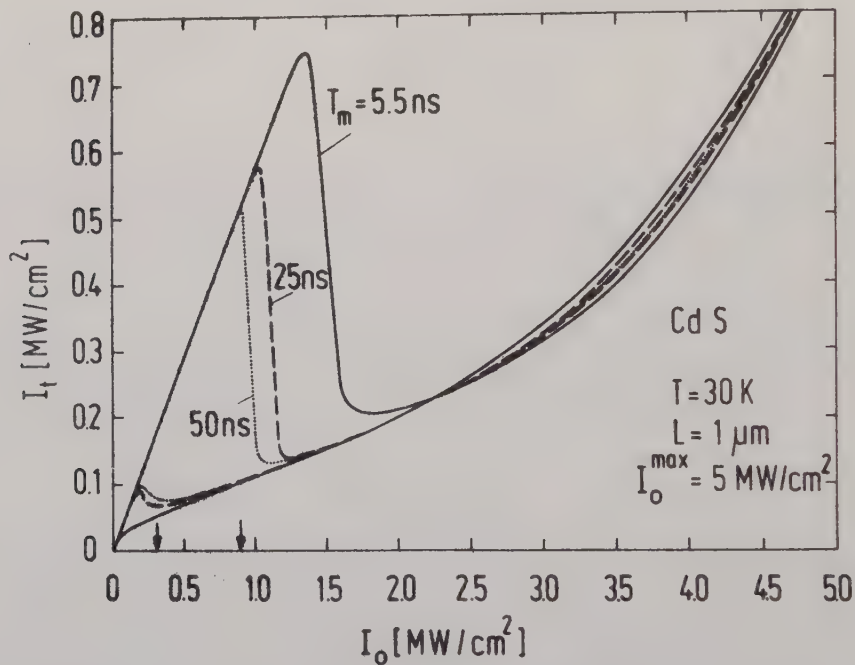


Abbildung 31. Die transmittierte Intensität als Funktion der einfallenden Intensität für verschiedene Pulslängen T_m ($D=+\infty$) /Koch 84b/

Erst Pulse, deren zeitliche Länge ungefähr der 500-fachen Lebensdauer [50ns] der e-h Paardichte entspricht, führen zu einer Hystereseschleife,

die nahezu den stationären Grenzfall reproduziert. Eine Verringerung der Pulsdauer führt zu immer größeren Hystereseschleifen. Dieser Effekt wird durch eine Fehlanpassung zwischen der Dichte und der Intensität bestimmt: Die Intensität wächst so schnell an, daß die Dichte im Kristall nicht mehr der aktuellen, sondern einer kleineren Intensität entspricht. Dadurch wird während eines Durchlaufs der Intensität durch den Kristall weniger absorbiert und mehr Intensität erreicht das Kristallende. Diesen Effekt bezeichnet man als Überschießen.

Experimentell ist es deshalb wichtig, bei der Untersuchung dieser optischen Bistabilität möglichst lange Pulse zu verwenden, um die intrinsische optische Bistabilität und nicht die durch die Trägheit bestimmten Überschießeffekte zu messen.

Nach der Untersuchung des Grenzfalles sehr großer Diffusion, wird jetzt der Fall verschwindender Diffusion behandelt, in dem es zur Ausbildung von starken, longitudinalen Variationen in der Dichte kommt. Zu dieser Berechnung werden die Dichten N_i an diskreten Stellen $z_i = (i-1)\Delta z$ und $N_i = N(z_i)$ mit $i=1, \dots, K$ findet man für die Dichte

$$\partial_t N_i = D/\Delta z^2 [N_{i+1} - 2N_i + N_{i-1}] - N_i/\tau + \alpha(\omega, N_i) I_i / \omega. \quad (4.80)$$

und für die Intensität

$$I_{i+1} = I_i \exp\{-\alpha(\omega, N_i) \Delta z\}.$$

Diese gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung für die Dichte N_i und die Intensität I_i werden nun aufintegriert. Die verwendeten numerischen Methoden werden in Anhang C diskutiert. Dieser Anhang enthält auch eine Auflistung des verwendeten Programms. Um die intrinsischen Eigenschaften der optischen Bistabilität zu untersuchen, wird für die weiteren dynamischen Untersuchungen eine Pulslänge von 50ns [500τ] gewählt. In Abbildung 32 ist die Zeitabhängigkeit der Intensität und der Dichte abgebildet.

Die Strukturen in der transmittierten Intensität sind dabei mit einer diskontinuierlichen Ausbreitung der Dichtefront im Kristall verknüpft.

Die Dichte wächst am Anfang des Kristalls langsam an, bis sie dort das Ende des unteren Astes (niederdichte Zustandes) erreicht hat und springt

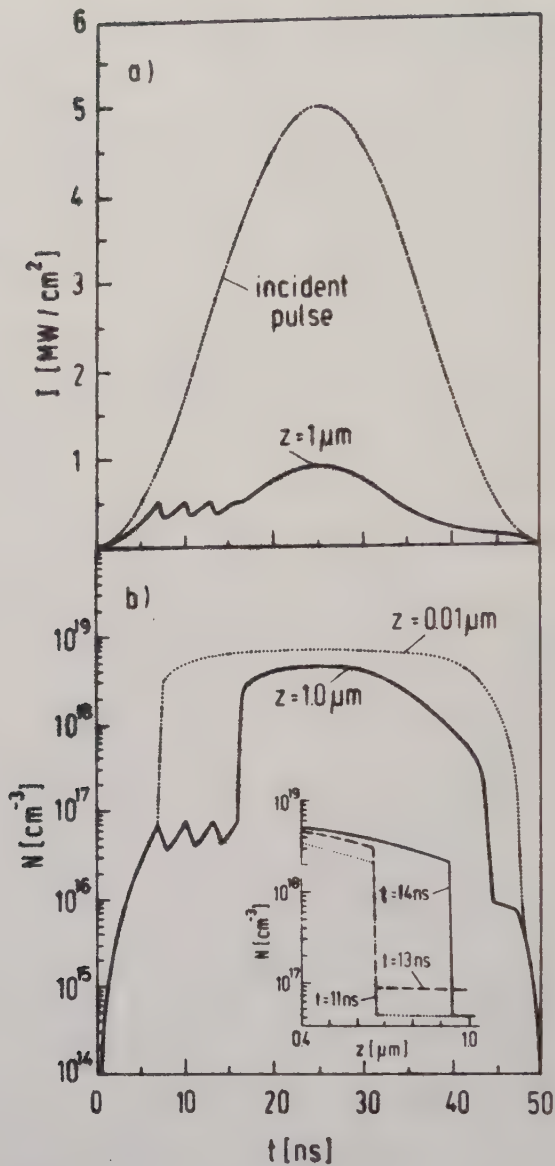


Abbildung 32. Die Zeitabhängigkeit der Intensität (a) und der Dichte (b) ohne Diffusion ($D=0$):

Der Einschub zeigt die räumliche Verteilung der Ladungsträger für verschiedene Zeiten nach Beginn des Pulses /Koch 84a/.

dann lokal auf einen Zustand hoher Dichte. Dieser Sprung auf den Zustand hoher Dichte findet nicht instantan statt, sondern benötigt eine gewisse Zeitspanne. Während dieser Zeitspanne wächst die Intensität weiter an und

treibt die Teilchendichte um die Länge z_c in den Kristall. Durch diesen Vorgang schießt die Dichtefront in Form einer Wand bis an den Ort z_c in den Kristall hinein. Der Zustand hoher Dichte absorbiert die Lichtintensität stärker. Deshalb fällt die Intensität in diesem Bereich stark ab. Steigt nun die Anregungsintensität noch weiter an, erhöht sich auch die Dichte sowohl im hoch- als auch im niederlichte Bereich. Dabei folgt die Dichte wieder den beiden verschiedenen Ästen der bistabilen Kennlinie. Die Intensität wächst solange stetig an, bis die Dichte unmittelbar hinter der Dichtefront das Ende des unteren Astes erreicht hat. Dann springt die Dichte auch hier auf den oberen Ast und die Dichtefront schießt ein weiteres Stück in den Kristall hinein. Dieses Verhalten wird durch den Einschub in Abbildung 32 verdeutlicht, in dem die Dichte für verschiedene Zeiten aufgetragen ist. Dieses sprunghafte Ausbreiten geht solange weiter, bis die Dichtefront das Ende des Kristalls erreicht hat.

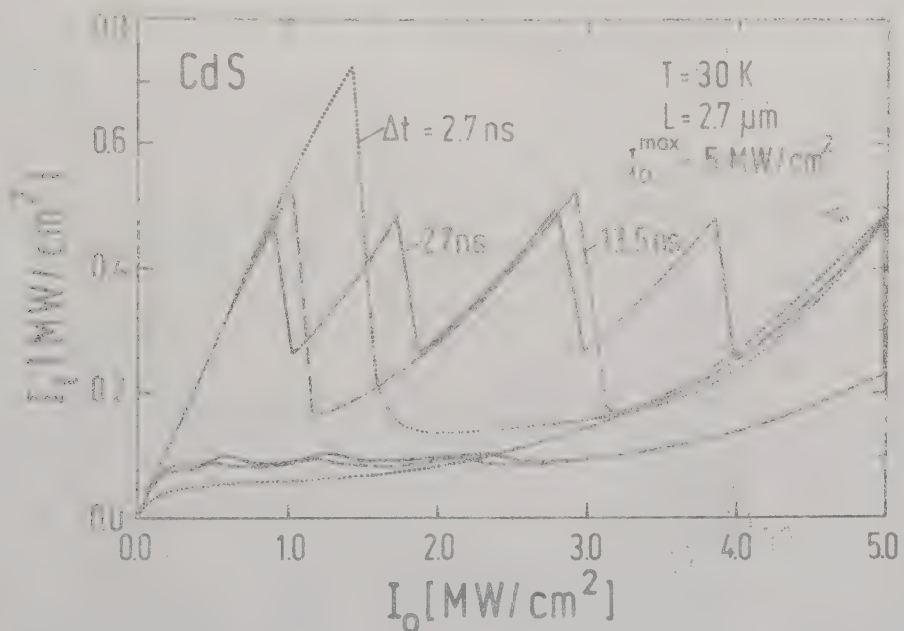


Abbildung 33. Transmittierte Intensität als Funktion der Eingangsintensität für verschiedene Pulslängen /Koch 84a/.

Nun befindet sich die gesamte Dichte im Kristall in einem Zustand hoher Dichte. Dieses intrinsisch bistabile Ausbreitungsverhalten kann bei hinreichend langen Pulsen beobachtet werden. Bei sehr kurzen Pulsen hingegen führen die Überschießeffekte zu einem Verschwinden dieser Strukturen wie in Abbildung 33 gezeigt ist. Die scharfe Dichtefront wird bei einer endlicher Diffusionskonstante D ausgeschmiert und die Propagation der Dichte wird zu einem kontinuierlichen Prozess. Wenn unsere Vorstellung über den Prozess richtig ist, sollten die Strukturen auf der transmittierten Intensität verschwinden. Die Intensität des transmittierten als Funktion des einfallenden Lichtfeldes ist für verschiedene endliche Diffusionskonstanten in Abbildung 34 aufgetragen.

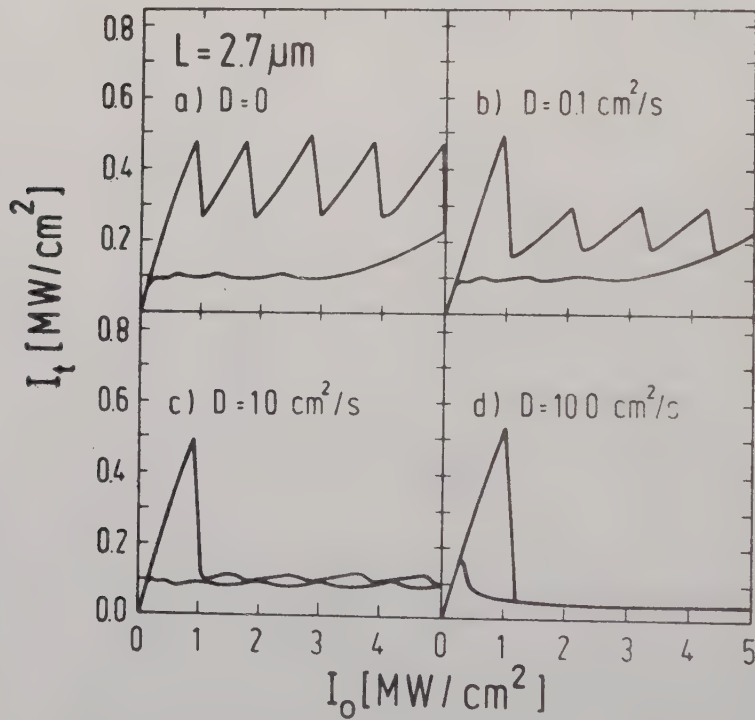


Abbildung 34. Transmittierte Intensität als Funktion der Eingangsintensität für verschiedene endliche Diffusionskonstanten /Koch 84a/.

Für die numerischen Untersuchungen wurde eine Kristalldicke von $2.7\mu\text{m}$ gewählt. Wie erwartet verschwinden mit wachsendem Diffusionskoeffizienten die Sägezahnstrukturen in der Transmission.

Die erzielten theoretischen Ergebnisse werden im weiteren durch ein einfaches Modell interpretiert. Dazu wird die Absorption durch ein Stufenmodell angenähert (siehe auch /Henneberger 84/). Die Modellabsorption lautet nun

$$\alpha(N) = \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Theta(N - N_c) \quad (4.81)$$

Θ ist die Heavisidesche Stufenfunktion. Durch die Parameter $N_c = 8 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $\alpha_1 = 1 \mu\text{m}^{-1}$ und $\alpha_2 = 0.05 \mu\text{m}^{-1}$ wird die numerisch berechnete Absorption gut beschrieben. Stationär springt in diesem Modell die Dichte diskontinuierlich, wenn die Intensität einen der beiden kritischen Werte erreicht

$$I_{\downarrow} = N_c \omega / \alpha_2 \tau \quad \text{und} \quad I_{\uparrow} = I_{\downarrow} \alpha_2 / \alpha_1 \quad (4.82)$$

Die analytische Lösung setzt sich für den Fall ohne Diffusion aus der Lösung für den Bereich niedriger Absorption

$$N_n(z, t) = \alpha_2 \exp\{-t/\tau - \alpha_2 z\} \int dy I(y) e^{y/\tau/\omega} \quad N < N_c$$

und aus der Lösung für den Bereich hoher Absorption

$$N_h(z, t) = N_n(z, t) \alpha_1 \alpha_2^{-1} e^{(\alpha_1 - \alpha_2) z_c} \quad N \geq N_c \quad (4.83)$$

zusammen. Die Sprungweite z_c der Dichtefront kann mit Hilfe der folgenden Überlegungen abgeschätzt werden

- Bei Beginn des Sprunges entspricht die Dichte am Kristallanfang der kritischen Dichte N_c

$$N_n(z=0, t=t_c) = N_c \quad (4.84)$$

Die Dichte erreicht für einen linear ansteigenden Puls $I(t)=I_m t/t_r$ zur Zeit t_c

$$t_c/\tau = 1 + I_{\downarrow} t_r / (I_m \tau) .$$

das Ende des unteren Astes.

- Die Dichte braucht die Zeit Δt , um vom Zustand niedriger Dichte in den Zustand hoher Dichte zugelangen. Diese Zeitspanne wird im weiteren durch die Lebensdauer der e-h Paare abgeschätzt

$$\Delta t \approx \tau .$$

(4.85)

Diese Abschätzung kann nicht im Rahmen dieses Stufenmodells hergeleitet werden, denn sie wird wesentlich durch die Absorption zwischen den beiden Zuständen beeinflußt.

- Die Sprungweite wird dadurch bestimmt, daß die Dichtefront während der Zeitspanne Δt in den Kristall springt.

$$z_c = \alpha_2^{-1} \ln(1 + \Delta t I_{\max} / t_r I_{\downarrow})$$

(4.86)

Mit den Werten $t_r/\tau=500$, $I_{\max}=5\text{MW}/\text{cm}^2$ und $I_{\downarrow}=847\text{kW}/\text{cm}^2$ findet man eine Sprungweite $z_c=0.23\mu\text{m}$. Der numerische Wert aus dem Einschub von Abbildung 36 beträgt $0.28\mu\text{m}$.

Das einfache Modells liefert eine gute Übereinstimmung mit den numerischen Werten. Bei dieser Abschätzung wurde nicht berücksichtigt, daß sich die Intensität während des Sprunges im numerischen Modell stärker als im Stufenmodell absenkt. Für den Vergleich mit dem numerisch erzielten Ergebnis ist auch noch zu berücksichtigen, daß die vorhandene Variation der Absorption im Zustand niederer Dichte eine größere Sprungweite als die konstante Absorption dieses Modells bewirkt.

Die Erweiterung der absorptiven Bistabilität auf quasi- zweidimensionale Halbleiter

In letzter Zeit wurde die optische Bistabilität experimentell verstärkt in quasi-zweidimensionalen (2d) Halbleitern untersucht /Chemla 83/. Quasi-zweidimensionale Halbleiter sind Materialien, in denen sich die Ladungsträger nur in zwei Richtungen frei bewegen können. Die Bewegung in der dritten Dimension ist durch äußere Zwangsbedingungen eingeengt. Diese Zwangsbedingungen werden experimentell dadurch realisiert, daß die Bandlücke durch Veränderung der Kristallzusammensetzung periodisch variiert wird. Diese Schichtkristalle werden mit Hilfe der Molekularstrahlepitaxie gezüchtet. Das Wachstum eines Kristalls kann mit dieser Methode auf die Atomlage genau gesteuert werden /Dingle 75/. Die im Kristall künstlich erzeugte periodische Struktur wird als Übergitter bezeichnet. Da sich die Bandkante beim Übergang zwischen zwei Schichten hinreichend scharf ändert, kann das daraus folgende Potential durch ein Kastenpotential beschrieben werden. In einem solchen Potential quantisiert die Energie der Ladungsträger und es bilden sich zweidimensionale Energiesubbänder aus.

Diese Übergitter können durch zwei verschiedene Mechanismen hergestellt werden.

- Ein Kristall wird abwechselnd mit negativ und positiv geladenen Fremdatomen dotiert. Die dotierten Schichten werden durch undotierte Bereiche getrennt (nipi-Struktur, Ladungsübergitter) /Döhler 83/.
- Man baut einen Kristall schichtweise aus zwei verschiedenen Materialien auf, die ähnliche chemische und kristallographische Eigenschaften besitzen (strukturelle Übergitter).

Im weiteren beschränke ich mich auf strukturellen Übergitter, da diese experimentell besser untersucht sind.

Ist die Breite einer solchen Schicht kleiner als der Bohrsche Radius eines Exzitons, dh. der e-h Korrelationslänge, verringert sich der mittlere Abstand zwischen Elektron und Loch. Dies führt zu einer stärkeren Bindung des Exzitons. Aus diesem Grund bleiben Exzitonen in quasi- zweidimensionalen Halbleitern auch noch bei Zimmertemperatur thermisch stabil und können auch bei diesen Temperaturen noch experimentell untersucht werden.

In GaAs entsteht eine dispersive optische Bistabilität im dreidimensionalen Fall dadurch, daß sich die Exzitonen mit wachsender Dichte immer besser abschirmen, bis sie bei einer kritischen Dichte ionisieren (Mottübergang). Diesen physikalischen Effekt gibt es auch in den quasi-zweidimensionalen Halbleitern. Die daraus resultierende optische Bistabilität kann deshalb auch noch bei Zimmertemperatur beobachtet werden. Experimentell wurde diese dispersive optische Bistabilität an einem GaAs/GaAlAs Mischkristall beobachtet /Gibbs 82/. Dieser Kristall besteht aus dem optisch aktiven Material GaAs das durch optisch inaktive GaAlAs Schichten getrennt ist, bei denen typischerweise 20 bis 30 % der Galliumatome durch Aluminium ersetzt wurden /Chemla 83/.

In diesen Mischkristallen bilden die Ladungsträger bei hohen e-h Paardichten ein Plasma. Dieses senkt die Bandkante als Funktion der Dichte ab. Regt man solche Kristalle unterhalb der Bandkante an, ist die Absorption zunächst schwach. Entspricht die renormierte Bandkante der einfallenden Energie, beginnt eine starke Einphotonenabsorption. In Analogie zum letzten Kapitel führt dieser starke Wechsel in der Absorption zu einer optischen Bistabilität.

Die Absorption ist näherungsweise durch den folgenden Ausdruck gegeben /Haug 84/

$$\alpha(\omega) \propto D(\omega) (1 - f_e - f_h). \quad (4.87)$$

Die Zustandsdichte $D(\omega)$ ist in d Dimensionen durch das folgende Oberflächenintegral definiert

$$D(\omega) = 2(2\pi)^{-d} \int d\Omega |\nabla_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}|^{-1}. \quad (4.88)$$

Berechnet man diesen Ausdruck für einen quasi-zweidimensionalen Halbleiter ($d=2$), findet man in Bandkantenähe

$$D(\omega) = m\pi^{-1} \theta(\omega - E_g). \quad (4.89)$$

Die Stufenfunktion wurde eingeführt, da Ladungsträger erst für Energien oberhalb der Bandkante angeregt werden können. Für niedrige Temperaturen ist auch die Absorption näherungsweise durch eine Stufenfunktion gegeben.

$$\alpha = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) \theta(N - N_c) \quad (4.90)$$

α_0 und α_1 sind zwei Konstanten, N ist die Dichte der e-h Paare. α_0 beschreibt die schwache Untergrundsabsorption für Energien unterhalb der Bandkante, während α_1 die starke Einphotonenabsorption representiert. Für die Dichte $N=N_c$ entspricht die renormierte Bandlücke E_g' der Anregungsenergie ω und eine starke Absorptionsänderung tritt auf.

Für die numerische Simulation dieses Modells wurde als Dicke einer GaAs Schicht 50 Å gewählt. Diese Schichtdicke trägt der quasi- Zweidimensionalität des theoretischen Modells Rechnung. Die geringe Variation der Intensität in einer GaAs-Schicht führt in dieser zu einer nahezu homogenen Dichteverteilung in Strahlrichtung. Im weiteren wird deshalb die räumliche Variation der Dichte vernachlässigt und die Variablen (Dichte und Intensität) werden räumlich gemittelt. (4.73-4.75). Das Eingangsfeld ändert sich mit einer quadratischer Sinusvariation zeitlich (4.79).

Dieses Modell wird für einen Kristall mit 100 GaAs Schichten numerisch ausgewertet. Dabei werden diffusive Kopplungen zwischen den Schichten und Reflexionen an den Grenzflächen vernachlässigt.

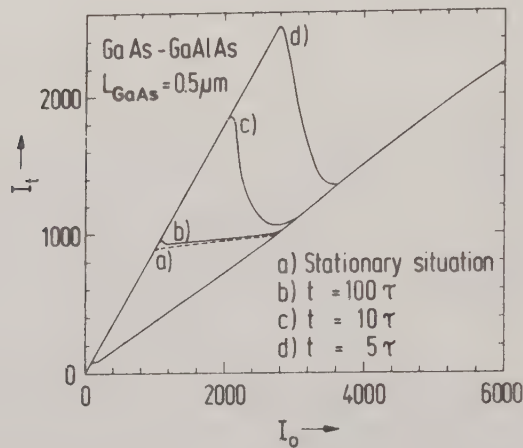


Abbildung 35. Die transmittierte Intensität I_t als Funktion des Eingangsfeldes I_0 für verschiedene Pulsweiten t_M ($\tau = 10\text{ns}$)

In Abbildung 35 ist die transmittierte Intensität als Funktion der Eingangsintensität aufgetragen. Die Absorption α_0 ($\alpha_1 = 10\alpha_0$) wird als $\alpha_0 = 10^3 \text{cm}^{-1}$ angenommen. Für kurze Pulse sind dynamische Hystereseeffekte (Überschießen) dem intrinsischen bistabilen Verhalten überlagert. Dieses Verhalten verschwindet bei längeren Pulsen. Man erhält für eine Eingangsintensität von ungefähr 8 kW/cm^2 bistabiles Verhalten bei Zimmertemperatur.

4.2.3 VERGLEICH ZWISCHEN THEORIE UND EXPERIMENT

In diesem Kapitel wurde die optische Bistabilität aufgrund einer induzierten Absorption beschrieben. Zu dieser Bistabilität liegen einige experimentelle Ergebnisse vor /Rossmann 83, Bohnert 83, Klingshirn 84, Gibbs 85, Wherrett 84/.

Zunächst werden die experimentellen Ergebnisse von Bohnert et al zur absorptiven Bistabilität in CdS diskutiert. In diesem Fall wurde die Probe mit Pulsen angeregt, die eine zeitliche Länge von einigen Nanosekunden haben. Für die optische Bistabilität sind deshalb elektronische und nicht thermische Effekte wesentlich. Schätzt man die e-h Paar Diffusionskonstante nach den Messungen von Kempf et al ab, erhält man einen Wert in der Größenordnung von $D=10 \text{ cm}^2/\text{s}$ /Kempf 84/. Mit diesem Wert verschwindet in unseren theoretischen Modellrechnungen die diskutierte Propagation der Dichtefront und damit die Modulation der transmittierten Intensität. Die rechte Kurve stellt die beobachtete absorptive optische Bistabilität in CdS dar /Bohnert 83/. Man findet kein deutliches Anzeichen für zusätzlich überlagerte Strukturen. Mit der induzierten Absorption sind auch dispersive Änderungen der optischen Eigenschaften von CdS verbunden. Die Analyse zeigt, daß die Maxima beider Renormierungen in unterschiedlichen Spektralbereichen liegen.

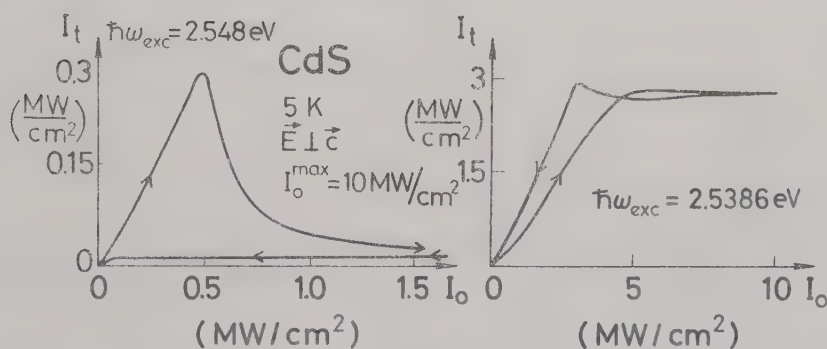


Abbildung 36. Plasmainduzierte Bistabilität in CdS:
Absorptive optische Bistabilität (linke Kurve) und
dispersive optische Bistabilität (rechte Kurve)
/Klingshirn 84/.

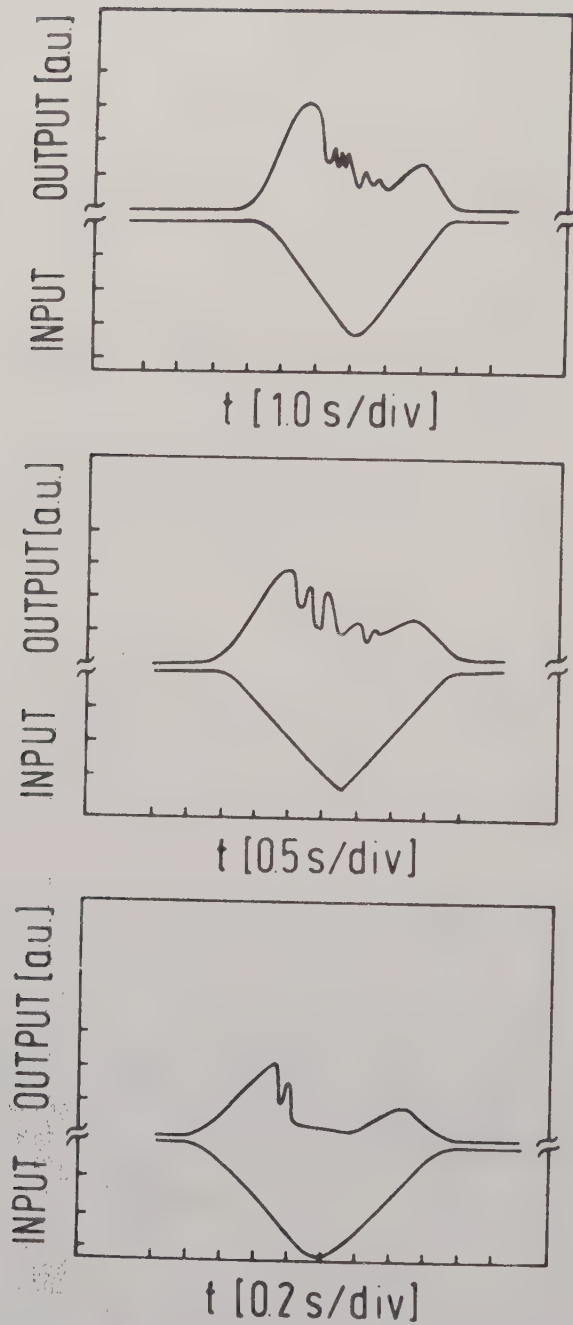


Abbildung 37. Transmittierte und Eingangsintensität eines Glasfilters für verschiedene Anstiegszeiten /Gibbs 85/

Auch die dispersiven Änderungen der dielektrischen Funktion geben Anlaß zu optischer Bistabilität. Die linke Kurve in Abbildung 36 zeigt die entsprechende experimentell gefundene Hysterese für diese dispersive Bistabilität. Die Messung wurde bei einer niedrigeren Frequenz als für die entsprechende absorptive Bistabilität durchgeführt. Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit den theoretischen Kurven ergibt eine qualitative Übereinstimmung. Das vorgestellte einfache Modell reproduziert die experimentellen Messungen recht gut. Wie bereits diskutiert, ist die Beobachtung der vorhergesagten Sägezahnstrukturen in CdS bei dieser elektronischen Bistabilität wegen der hohen Diffusion nicht leicht möglich. Hingegen könnte man in einem Material, das eine kleinere Diffusionskonstante besitzt, diese Strukturen beobachten.

Vor kurzem wurden entsprechende Messungen von Gibbs und Mitarbeitern an einem Bandkantenfilter durchgeführt /Gibbs 85/. In diesem Experiment wurde die Ausgangs- und die Eingangsintensität als Funktion der Zeit für verschiedene Pulslängen gemessen. Ihre Ergebnisse sind in Abbildung 37 aufgetragen. Dabei fanden sie zackenartige Strukturen in der Transmission, deren Zahl mit wachsender Pulsdauer zunahm, während sich deren Amplitude verringerte. Diese gemessenen Strukturen werden durch eine diskontinuierliche Ausbreitung einer Temperaturfront interpretiert.

Die verwendeten Filter setzen sich aus kleinen $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}$ - Mischkristallen zusammen, die in eine amorphe Glasmatrix eingebettet sind. Die Größe dieser Kristallite schwankt zwischen 100 und 1000 Å /Jain 83/. Die optischen Eigenschaften dieser Filter sind wesentlich bestimmt vom Mischungsanteil x zwischen Schwefel und Selen, von der Temperatur und von der Zahl der angeregten e-h Paare. Aus dem gemessenen Transmissionspektrum folgt für den Mischungsanteil ein Wert oberhalb von $x=0.9$ /Jain 83/. Diese Filter sind optisch isotrop.

Regt man diese Filter unterhalb der Bandkante optisch an, werden durch die schwache Absorption nur eine kleine Zahl von e-h Paaren im Kristall angeregt. Diese rekombinieren unter Erzeugung von Phononen und heizen dabei den Kristall auf. Durch die kombinierten temperatur- und dichteabhängigen Renormierungen der Einteilchenenergien senkt sich die Bandkante ab. Ein Wechsel zwischen der schwachen Absorption und der starken Einphotonenabsorption bewirkt wieder eine absorptive Bistabilität aufgrund einer induzierten Absorption.

Zur Beschreibung dieser optischen Bistabilität wird das schon für CdS untersuchte Modell verwendet (Gleichungen 4.54-4.59). Zusätzlich wird hier als weitere wesentliche Nichtlinearität die thermische Absenkung der Bandkante ($\Delta(T)$) berücksichtigt.

$$E_g' = E_g + \Delta(N) + \Delta(T) \tag{4.91}$$

Die entsprechende Absorption ist in Abbildung 38 als Funktion der Temperatur aufgetragen.

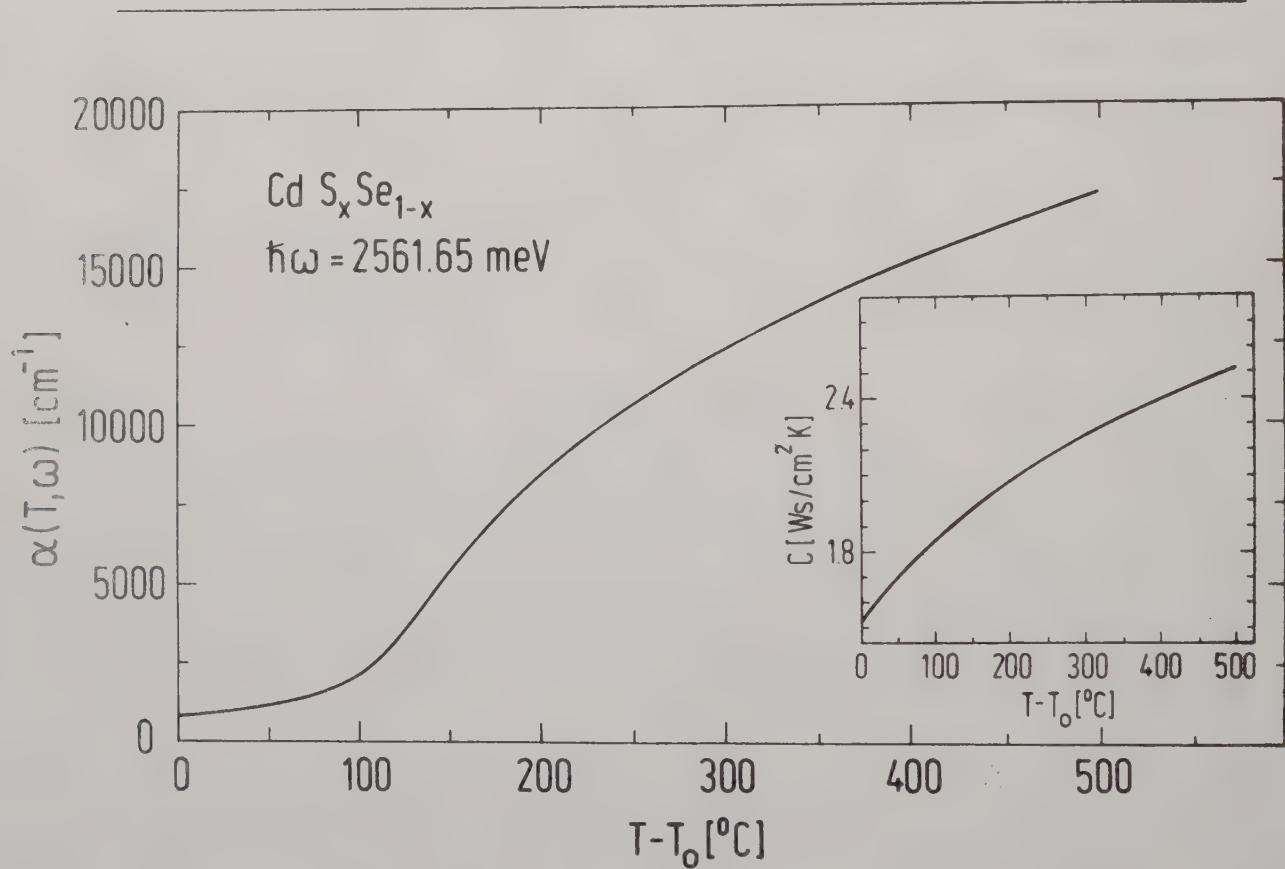


Abbildung 38. Die berechnete Absorption eines $\text{CdS}_x\text{Se}_{1-x}$ -Mischkristalls.: Der Einschub zeigt die spezifische Wärme als Funktion der Temperatur für Quarzglas /Heraeus 83/.

Bei der Berechnung der Absorption wurde die Dichte über die stationäre Beziehung

$$N=C(T)\tau_{eh}T/(\omega\tau) \quad (4.92)$$

aus der Temperatur bestimmt. Für niedrige Temperaturen findet man einen Ausläufer der Absorption ($T \leq 100^\circ\text{C}$). Erst wenn die Bandkante bei einer Temperaturdifferenz von 100°C oberhalb der Zimmertemperatur die einfallende Laserenergie erreicht hat, setzt eine starke Einphotonenabsorption ein. Der Einschub stellt die spezifische Wärme von Quarzglas dar. Da nahezu reines CdS in diesen Kantenfiltern vorliegt, werden im weiteren die Materialparameter von CdS (vgl. Abbildung 25 auf Seite 73) zusammen mit den folgenden Werten verwendet :

$E_g = 2510 \text{ meV}$, $\tau = 10\text{ms}$, $\omega = 2561.65 \text{ meV}$ (514.5nm), $\Delta(T) = -0.38(T-T_0)\text{meV}$ und einer Zimmertemperatur von $T_0 = 22^\circ\text{C}$.

Die Dynamik dieses Modells wird näherungsweise durch die folgenden Bilanzgleichungen

$$\partial_t N = -N/\tau_{eh} + \alpha I/\omega \quad (4.93)$$

für die Dichte,

$$\partial_t T = -(T-T_0)/\tau + \alpha I/C \quad (4.94)$$

für die Temperatur (mit der spezifischen Wärme C) und

$$\partial_z I = -\alpha I \quad (4.95)$$

für die Intensität beschrieben. Da die Dichte auf einer viel kürzeren Zeitskala als die Temperatur oder der einfallende Puls variiert, wird sie im weiteren adiabatisch eliminiert ($\partial_t N \approx 0$). Die diffusive Kopplung der Kristallite untereinander spielt in diesen Filtern nur eine untergeordnete Rolle und wurde im weiteren vernachlässigt. Der Verlustterm der Temperatur entsteht nur durch Wärmediffusion in die Glasmatrix.

Die Anpassung der theoretischen Absorption bei Zimmertemperatur an die experimentellen Daten führt auf eine effektive optischen Länge von $2.5\text{ }\mu\text{m}$. Das Verhältnis zwischen der Filterlänge von $L=0.2\text{ cm}$ und der optisch aktiven Länge des Materials bestimmt den Füllfaktor $p=1.25\cdot 10^{-3}$. Die berechnete Intensität muß zum Vergleich mit den experimentellen Daten durch den inversen Füllfaktor p skaliert werden. Die beiden gekoppelten Bilanzgleichungen werden für einen experimentell verwendeten linear in der Zeit ansteigenden und abfallenden Puls aufintegriert. In Abbildung 39 sind Ausgangs- und Eingangsintensität als Funktion der Zeit für drei verschiedene Anstiegszeiten aufgetragen. Das entsprechende Verhalten für die Temperatur des Mischkristalls ist in derselben Abbildung dargestellt. Bei der Darstellung der Intensität beachte man, daß für die Eingangs- und für die Ausgangsintensität verschiedene Skalierungen gewählt wurden. Die theoretischen Kurven weisen sägezahnförmige Strukturen sowohl bei der Ausgangsintensität als auch bei der Temperatur auf. In Analogie zur Ausbreitung einer Dichtefront in einem CdS- Kristall, sind diese Strukturen mit der diskontinuierlichen Ausbreitung einer Temperaturfront verknüpft. Die Höhe der Zacken nimmt für langsamer ansteigenden Pulsen ab, während ihre Anzahl zunimmt. Dieses Verhalten hängt damit zusammen, daß die Temperaturfront für längere Anstiegszeiten immer kleinere Sprünge in den Kristall macht. Vergleicht man die theoretischen Ergebnisse aus Abbildung 39 mit den experimentellen Kurven aus Abbildung 37 findet man ein qualitativ ähnliches Verhalten. Zusätzlich scheinen der longitudinalen Ausbreitung der Temperaturfront weitere Effekte überlagert zu sein. Diese Effekte sind bis heute noch nicht vollständig verstanden.

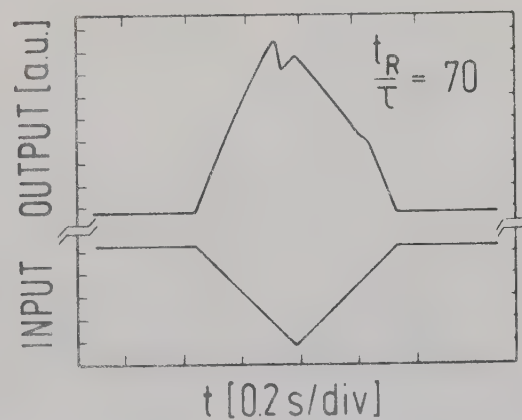
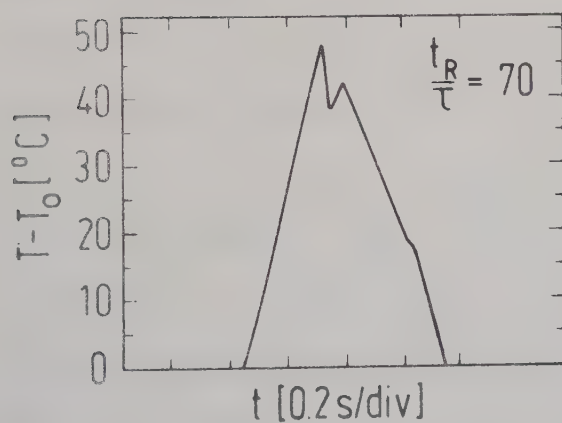
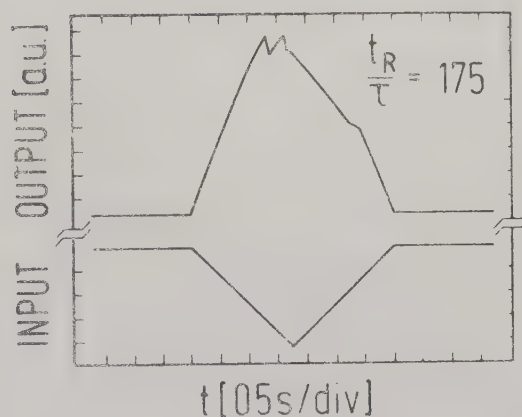
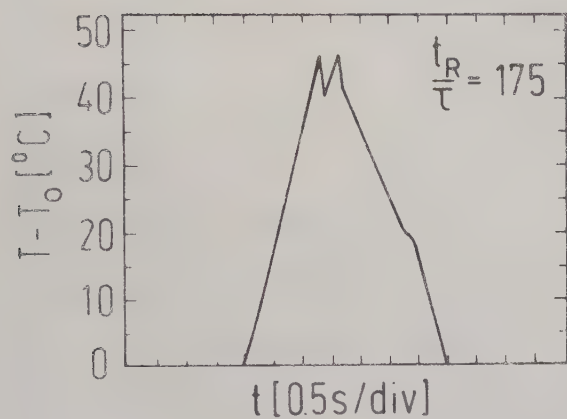
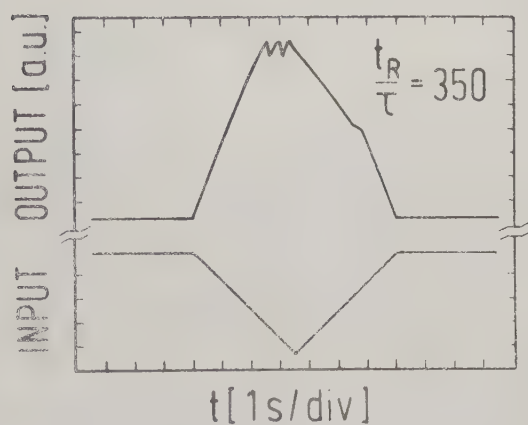
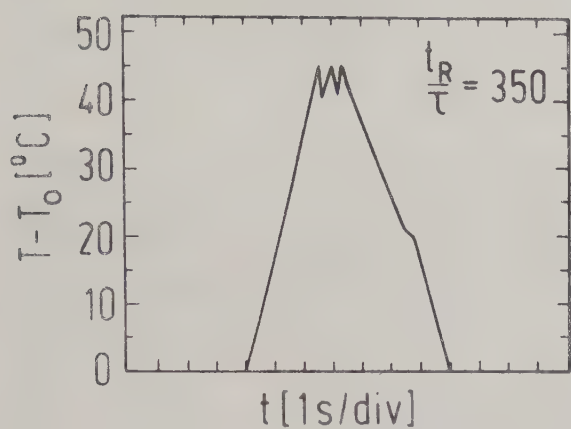


Abbildung 39. Eingangs-, Ausgangsintensität und die Temperatur als Funktion der Zeit für verschiedene Anstiegszeiten

5.0 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In dieser Arbeit wurde untersucht, wie die Dynamik der optischen Bistabilität in einem Halbleiter theoretisch behandelt werden kann. Dazu wurden die gekoppelten Transportgleichungen des komplexen, elektrischen Feldes und der Ladungsträgerdichte (bzw. der Temperatur) aufgestellt und in verschiedenen Grenzfällen gelöst.

Zuerst wurde als Mechanismus der optischen Nichtlinearität die Erzeugung von Biexzitonen untersucht. Dieses Problem konnte durch adiabatische Elimination der Dichte erheblich vereinfacht werden. Dies war möglich, da die Lebensdauer der virtuell angeregten Biexzitonen nur wenige Pikosekunden beträgt, während die Länge des Eingangspulses typischerweise einige Nanosekunden dauert. Das daraus resultierende, effektive Gleichungssystem für das elektrische Feld wurde unter dem Einfluß eines fluktuierenden Feldes untersucht. Diese Fluktuationen beschreiben die Variation eines realen Feldes um einen Mittelwert und bewirken eine Verbreiterung der, für die optische Bistabilität charakteristischen, stationären, deterministischen Zustände. Die beiden stabilen Zustände sind mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit realisiert. Die transmittierte Intensität ergibt sich als ein gewichteter Mittelwert aus den beiden besetzten Zustände. Dadurch wird die im deterministischen Grenzfall existierende Mehrdeutigkeit der transmittierten Intensität als Funktion der Eingangsintensität durch die Anwesenheit von Fluktuationen aufgehoben. Die transmittierte Intensität wird eine eindeutige Funktion des einfallenden Feldes.

Regt man dieses System hingegen mit einem Puls an, wird wieder eine Hysterese beobachtet. Dieser Effekt ist auf die endliche Lebensdauer der beiden Zustände zurückzuführen. Bei ansteigender Intensität I_0 folgt die transmittierte Intensität einige Zeit dem unteren Ast, während sie bei abfallender Intensität dem oberen Ast folgt. Aus diesem Verhalten resultiert die Hysterese.

Anschließend wurde in der vorliegenden Arbeit der Fall einer optischen Bistabilität aufgrund einer induzierten Absorption untersucht. Dabei wurde die durch Plasmaeffekte bedingte absorptive Änderung behandelt. Das elektrische Feld relaxiert in diesem Fall viel schneller als die e-h Paare

und konnte adiabatisch eliminiert werden. Dies ergab eine effektive Bilanzgleichung für die Plasmadichte, die in zwei verschiedenen Grenzfällen behandelt wurde. Im Grenzfall hoher Diffusion verteilt sich die Dichte räumlich homogen über den gesamten Kristall. Man geht dann zu räumlich gemittelten Größen über, die einer effektiven Transportgleichung genügen. Im entgegengesetzten Grenzfall einer verschwindenden Diffusion trennen sich die beiden Dichtephase räumlich voneinander und es bildet sich im Kristall eine Dichtefront aus. Die Dynamik dieser Dichtefront prägt sich dem System auf und führt zu zeitlichen sägezahnartigen Variationen in der Transmission.

Durch diese Untersuchung wurden eine Reihe von Fragen beantwortet, doch ergaben sich einige neue Fragenstellungen:

- Bisher wurde zB. für die dispersive optische Bistabilität in einem Halbleiter die Dynamik und insbesondere die lokale Variation der Dichte der elektronischen Anregungen und des Lichtfeldes noch nicht untersucht. Die Resonatorstruktur läßt hier keine longitudinale Phasentrennung zu, so daß für nicht zu starke Diffusion eine transversale Phasentrennung in Form von Ringstrukturen oder das Aufbrechen der Intensität zu Lichtfaserbündeln zu erwarten ist.
- Bei dieser Behandlung der optischen Bistabilität wurde in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, daß das Eingangsfeld auch einen transversalen Verlauf besitzt. Numerische Untersuchungen von Moloney und von Firth zeigen, daß dann unter Umständen Phasenseparation in der transversalen Komponente stattfinden kann /Moloney 82, Firth 82/. Eine diskontinuierliche Ausbreitung der Ladungsträgerdichtefront in transversaler Richtung führt zu zusätzlichen Strukturen in der Transmission.
- Die Maxwell- Bloch- Gleichungen zeigen chaotisches Verhalten für die sich langsam ändernde Amplitude des elektrischen Feldes /Lugiatio 82/. Bisher wurde noch nicht untersucht, ob die Einbeziehung der vier vernachlässigten Freiheitsgrade (Real- und Imaginärteile der zweiten Ableitungen des elektrischen Feldes und der Polarisierung) diese Ergebnisse verändern. Erste Untersuchungen scheinen darauf hinzudeuten, daß durch die Einbeziehung weiterer Freiheitsgrade auch

chaotische Lösungen bei Parametern existieren, bei denen sich die langsam ändernde Amplitude regulär verhält.

Dies sind nur einige der interessantesten Fragen.

Zusammenfassend kann man sagen, daß anhand der optische Bistabilität eine Vielfalt von nichtlinearen, dynamischen Effekten wie Phasentrennung, die Dynamik der Bewegung der Dichtefront, Pulsieren, Periodenverdopplung und Chaos untersucht werden kann. Dieses große Spektrum von nichtlinearen Effekten hat das Interesse von vielen Wissenschaftlern an der optischen Bistabilität geweckt.

Reale physikalische Systeme besitzen eine große Zahl von Freiheitsgraden, die nur selten vollständig behandelbar sind. In einem Experiment beobachtet man anstelle der vielen "mikroskopischen" nur einige wenige "makroskopische" Variable. In erster Näherung kann man sich deshalb bei der theoretischen Beschreibung nur auf diese makroskopischen Variablen beschränken. Deren Dynamik wird durch eine endliche Zahl von im allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichungen, den deterministischen Gleichungen, beschrieben.

Der Einfluß des adiabatisch eliminierten mikroskopischen Systems führt zu dissipativen Termen und zu stochastischen Fluktuationen in den dynamischen Gleichungen. Man geht von den deterministischen zu stochastischen Gleichungen über. Solange die deterministischen Gleichungen global stabil sind, führt diese Erweiterung nur zu kleinen Korrekturen der Ergebnisse. Wird hingegen die deterministische Lösung in- oder metastabil, werden die Fluktuationen des Systems wichtig.

Bei den stochastischen Prozessen unterscheidet man zwischen Fluktuationen, die auf Grund von internem oder externem Rauschen auftreten. Bei internem Rauschen liegt der Ursprung des betrachteten stochastischen Prozesses nicht in Schwankungen der von außen vorgegebenen Parameter sondern im System selbst begründet. Daher sind die auftretenden Fluktuationen selbst Funktionen der betrachteten Variablen (multiplikatives Rauschen). Externes Rauschen liegt vor, wenn die von außen vorgegebenen Parameter selbst um Mittelwerte schwanken. Dies führt zu additiven Rauschbeiträgen in den dynamischen Gleichungen.

Bei realen Prozessen kommen im allgemeinen beide Arten des Rauschens vor. Im folgenden diskutieren wir verschiedene Methoden, mit denen diese stochastische Einflüsse behandelt werden können.

Die Mastergleichung

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, die es erlaubt, ausgehend von den makroskopischen Bewegungsgleichungen eines Systems, den Einfluß von internem Rauschen exakt zu behandeln. Zur Veranschaulichung wählen wir das einfache Modell eines Halbleiters:

Die Dichte N der freien Ladungsträger werde in einem Kristall durch eine Gewinn- (g) und eine Verlustrate (r) beschrieben. Für die Änderung der Dichte mit der Zeit findet man die einfache Differentialgleichung :

$$\partial_t N_i = g_i(N) - r_i(N) \quad (A.1)$$

Natürgemäß unterliegt die Dichte auch Fluktuationen, die im folgenden am Beispiel eines diskreten Systems näher untersucht werden.

Durch die Einführung der Fluktuationen wird den einzelnen Zuständen nun eine Wahrscheinlichkeit f zugeordnet. Mit einer Mastergleichung untersucht man nun, wie sich die Wahrscheinlichkeit f_N des Zustandes N , d.h. die Wahrscheinlichkeit N Teilchen zu finden, mit der Zeit verändert. Die zeitliche Änderung dieses Zustandes ist durch die Streuraten des Zustandes gegeben. Damit findet man für die zeitliche Änderung von f_N :

$$\partial_t f_N = \sum_M (W_{NM} f_M - W_{MN} f_N) \quad (A.2)$$

Die W_{NM} sind die Übergangsraten vom Zustand M in den Zustand N . Diese Gleichung bezeichnet man auch als die diskrete Mastergleichung. Die Erwartungswerte der stochastischen Variablen N erhält man aus

$$\langle N \rangle = \sum_M M f_M. \quad (A.3)$$

Häufig kann man sich bei den diskreten Prozessen auf Ein-Schrittprozesse beschränken, d.h. aus der Summe aller Zustände berücksichtigt man nur die Zustände für die $M=\pm 1$ gilt. In dieser Näherung findet man nun aus der Mastergleichung (A.2) für unser makroskopisches Modell (A.1) die Gleichung

$$\partial_t f_N = r(N+1)f_{N+1} + g(N-1)f_{N-1} - [r(N)+g(N)]f_N. \quad (A.4)$$

Oft nähert man, anstatt die Mastergleichung zu lösen, diese durch eine partielle Differentialgleichung der Wahrscheinlichkeitsdichte, der Fokker

- Planck - Gleichung, an. Diesen Weg werden wir im weiteren auch beschreiten.

Die Fokker-Planck-Gleichung

Ausgangspunkt für die Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung bildet in dieser Arbeit die Mastergleichung (A.4). Dazu führt man eine Kramers - Moyal - Entwicklung durch, d.h. die Terme proportional $f_{N\pm 1}$ werden in eine Taylor-Reihe entwickelt /zB. Risken 84/ :

$$r(N+1)f_{N+1} = \sum_M (M!)^{-1} \partial_N^M [r(N)f_N] \quad (A.5)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß in diesem Fall (Einschrittprozesse) $\Delta N = \pm 1$ ist. Nimmt man an, daß die Reihe (A.5) schnell konvergiert, kann die Entwicklung abgebrochen werden. Mitnahme der Glieder bis $M=2$ liefert die Fokker - Planck Näherung der Mastergleichung. Nach dem Pawula-Theorem verschwinden alle höheren Ordnungen ($M>2$), wenn nur eine der höheren Ordnungen identisch verschwindet. Für reale physikalische Systeme verschwinden die höheren Ordnungen in der Regel aber nicht. Daher ist die Fokker-Planck-Gleichung oft nur als Näherung an die Mastergleichung zu verstehen. Für das hier diskutierte Modell lautet die Fokker-Planck-Gleichung

$$\partial_t f_N = - \partial_N [r(N) - g(N) - \frac{1}{2} \partial_N \{ r(N)+g(N) \}] f_N \quad (A.6)$$

Im allgemeinen setzt sich die Fokker - Planck - Gleichung aus einem Drift-D und einem Diffusionsterm Q zusammen.

$$\partial_t f_N = - \partial_N [D(N) - \frac{1}{2} \partial_N Q(N)] f_N \quad (A.7)$$

Dieser Ausdruck läßt sich leicht für den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern

$$\partial_t f = - \operatorname{div} \{ D - \frac{1}{2} \operatorname{grad} Q \} f = L_{fp} f \quad (A.8)$$

Die Fokker - Planck - Gleichung hat die Form einer Kontinuitätsgleichung

(A.9)

für die Wahrscheinlichkeit f , wobei der Wahrscheinlichkeitsstrom J durch den Ausdruck in den geschweiften Klammern gegeben ist.

Der Erwartungswert einer Funktion $A(x)$ der stochastischen Variablen kann direkt als ein Integral über die Funktion, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung, dargestellt werden

$$\langle A \rangle = \int d^n y A(y) f(y).$$

(A.10)

Im folgenden werden verschiedene Methoden diskutiert, wie eine Lösung der Fokker - Planck - Gleichung gefunden werden kann. Durch die Kenntnis der stationären Lösung vereinfacht sich die dynamische Behandlung der Fokker-Planck- Gleichung erheblich. Es ist dann nämlich möglich, mit ihrer Hilfe, den ursprünglich nicht hermitischen Fokker- Planck- Operator zu hermitisieren und ihn dann mit den aus der Quantenmechanik üblichen Methoden zu behandeln

Ein stationärer Zustand eines Systems liegt vor, wenn die Summe aller Teilströme zwischen den einzelnen Zuständen verschwindet.

Diese Bedingung für die Existenz einer stationären Lösung wird durch die Forderung nach Verschwinden der einzelnen Ströme, einschränkt, d.h. man fordert, daß der Nettostrom zwischen zwei Zuständen verschwindet ($W_{MN} f_N = W_{NM} f_M$). Man spricht dann auch von detailliertem Gleichgewicht (detailed balance). Bei Vorliegen von detailliertem Gleichgewicht ist die Summe aus Hin- und Rückstrom invariant unter der Anwendung einer Zeitumkehroperation. Diese definiert man durch /Graham 80/.

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t \\ \mathbf{v}_i &\rightarrow -\mathbf{v}_i \\ \lambda_i &\rightarrow \lambda_i \\ Q_{ij} &\rightarrow Q_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j Q_{ij} \end{aligned}$$

(A.11)

λ sind dabei die äußeren Felder, die sich nichttrivial transformieren können. Die ε können nur die Werte ± 1 annehmen. Wird das Vorzeichen von ε entsprechend der physikalischen Symmetrie der dynamischen Variablen gewählt, nennt man das auch die ε -Zeitumkehroperation. Die stationäre Verteilungsfunktion der Wahrscheinlichkeit wird nun mit Hilfe der obigen Operation bestimmt. Dann spaltet man den Strom in einen reversiblen J^{rev} und einen irreversiblen Anteil J^{irr} auf.

$$J = J^{\text{rev}} + J^{\text{irr}} \quad (\text{A.12})$$

Der irreversible Anteil bleibt unter der Zeitumkehroperation unverändert. Daher müssen die einzelnen Komponenten des irreversiblen Stromes im stationären Fall verschwinden

$$J_i^{\text{irr}} = 0, \quad (\text{A.13})$$

während, wie aus (A.8) folgt, nur die Divergenz des reversiblen Stroms verschwindet

$$\text{div } J^{\text{rev}} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Setzt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung f als

$$f = N e^{-\Phi}, \quad (\text{A.15})$$

an, wobei N die Normierungskonstante und Φ das nichtgleichgewichtsthermodynamische Potential darstellt, findet man für das Potential die folgenden Bedingungen :

$$D_i^{\text{irr}} = \partial_j Q_{ij} - Q_{ij} \partial_j \Phi \quad (\text{A.16})$$

und

$$\partial_i D_i^{\text{rev}} e^{-\Phi} = 0.$$

(A.17)

Wie Graham zeigen konnte, gelten diese Bedingungen nicht nur für den betrachteten Spezialfall, sondern ganz allgemein für alle stationären Systeme /Graham 71/. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, wie die stationäre Lösung berechnet werden kann. Zum einen kann man aus der trivialen Zeitumkehroperation (A.11) die stationäre Lösung direkt gewinnen. Man spricht dann auch von einem offensichtlichem detailliertem Gleichgewicht. Es gibt nun aber auch noch die andere Möglichkeit, daß man die stationäre Lösung nicht aus der einfachen Zeitumkehr bestimmen kann. Dann braucht man eine verallgemeinerte Umkehroperation, um die stationäre Lösung angeben zu können. Es gibt aber keine systematische Methode, diese Transformation zu bestimmen. Die einzige Möglichkeit besteht darin, daß man die Fokker-Planck-Gleichung löst und mit Hilfe dieser Lösung die Zeitumkehroperation berechnet. In diesem Fall spricht man von einem nicht offensichtlichem detaillierten Gleichgewicht. In diesem Fall bieten die hier diskutierten Überlegungen keinen direkten Vorteil bei der Konstruktion der stationären Lösung.

Könnte man die stationäre Lösung berechnen, dann kann man durch die Transformation

$$L = e^{\Phi/2} L_{\text{FP}} e^{-\Phi/2}$$

(A.18)

den Fokker-Planck-Operator hermitisiert /Risken 72/. Für diesen Operator kann nun das schon aus der Quantenmechanik bekannte Eigenwert Problem behandelt werden.

Die Langevin-Gleichung

Bei der Behandlung von mehrdimensionalen Problemen ohne offensichtlichem detailliertem Gleichgewicht ist es oft nicht mehr möglich, die entsprechende Master- oder Fokker-Planck-Gleichung analytisch zu behandeln. Man greift dann auf numerische Methoden zurück. Hat man sich erst einmal zur Einsetzung numerischer Methoden entschlossen, ist es häufig sinnvoller, anstelle der Fokker-Planck-Gleichung die stochastisch äquivalenten Langevingleichungen zu lösen.

Zu deren Ableitung gehe ich von der Fokker-Planck-Gleichung aus und berechne die zeitliche Änderung des Erwartungswertes der stochastischen Variablen x . In diesem Ausdruck setzt man die Fokker-Planck-Gleichung ein und findet

$$\partial_t x_i = D_i + g_{ij} d\xi_j(t) \quad (\text{A.19})$$

Die zeitliche Änderung des deterministischen Anteil der Langevingleichung ist durch den Driftterm gegeben. Dazu wird noch eine zufällige Kraft ξ , das Rauschen, addiert. Die Diffusionsmatrix Q ist durch den Koeffizienten des Rauschterms gegeben

$$Q_{ij} = g_{im} g_{jm} \quad (\text{A.20})$$

Die Koeffizienten des Rauschterms sind im allgemeinen auch noch Funktionen der stochastischen Variablen. Für die stochastische Kraft ξ macht man eine Gauß-Markov Annahme

$$\langle \xi_i \rangle = 0 \quad (\text{A.21})$$

und

$$\langle \xi_i(t+\tau) \xi_j(t) \rangle = \delta_{ij} \delta(\tau), \quad (\text{A.22})$$

wobei $\langle 0 \rangle$ sowohl einen Ensemble- als auch ein Zeitmittel von 0 bedeuten kann.

Die stochastische Differentialgleichung (A.19) ist solange ohne Sinn, als keine Aussage darüber getroffen wird, wie die Integration über das Produkt aus der stochastischen Variablen ξ und g_{im} zu definieren ist. Dazu integrieren wir die Differentialgleichung (A.19) von t_i nach $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ und erhalten für den eindimensionalen Fall

$$x_{i+1} - x_i = D_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g_{im}(\tau) d\xi_m \quad (\text{A.23})$$

Den letzten Summanden behandeln wir, indem wir zur Riemann - Stieltjes - Summe übergehen.

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g_{im}(\tau) d.\xi_m = \sum g_{im}(\tau_i)(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}) \quad (\text{A.24})$$

Für die τ_k kann man den allgemeinen Ansatz

$$\tau_i = (1-a) t_{i-1} + a t_i \quad (\text{A.25})$$

machen. Wählt man $a=0$, erhält man die Definition der stochastischen Integrals nach Ito. Setzt man jedoch $a=\frac{1}{2}$ (Stratonovich- Interpretation), dann kann man zwar die aus der deterministischen Differential - und Integralrechnung gewohnten Regeln verwenden, erhält aber in der Drift einen zusätzlichen Anteil, den spurius Driftterm

$$D_i \rightarrow D_i - g_{mj} \partial_m g_{ij} \quad (\text{A.26})$$

Diese beiden verschiedenen Interpretationen sind auf das Problem abbildbar, welchen Wert das Integral über die Deltafunktion annimmt, wenn das Argumentes der Deltafunktion an einer der beiden Grenzen verschwindet. Ito nimmt dabei an, daß die Deltafunktion nur an der unteren Grenze einen Beitrag liefert. Stratonovich hingegen nimmt an der oberen wie auch an der unteren Grenze für die Deltafunktion einen Beitrag $\frac{1}{2}$ an. Die Ergebnisse, die durch die beiden Regeln gewonnen werden, können ineinander umgerechnet werden. In der Physik sollte man bei einer Langevingleichung eher die Stratonovich - Interpretation verwenden, da dies ein Spezialfall einer in der Natur näherungsweise vorliegenden, verbreiterten Deltafunktion ist.

B.0 PROGRAMM ZUR BERECHNUNG DER LANGEVINGLEICHUNGEN

PROGRAMM ZUR BERECHNUNG DER LANGEVINGLEICHUNGEN

Im weiteren ist das FORTRAN77 Programm wiedergegeben, mit dem auf einer IBM-3081 die Simulation der dispersiven Bistabilität in CuCl durchgeführt wurde.

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
INTEGER*4 TEXT(10)
```

```
C*****
```

```
C
```

```
C DIESES PROGRAMM BERECHNET DIE ZEITABHAENGIGE
```

```
C LANGEVIN-GLEICHUNG DER OPTISCHEN BISTABILITAET IN CUCL
```

```
C
```

```
C -----
```

```
C
```

```
C PARAMETERLISTE:
```

```
C HKAB,OS,OSS,DOM SIND DIE MATERIALPARAMETER FUER CUCL
```

```
C NDIM ZAHL DER SIMULATIONEN
```

```
C X(NDIM,6) ABLEITUNGSVEKTOR FUER SUBROUTINE MOVE
```

```
C FX(NDIM) VEKTOR DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN
```

```
C X1 REALTEIL DES ELEKTRISCHEN FELDES
```

```
C X2 IMAGINAERTEIL DES ELEKTRISCHEN FELDES
```

```
C T ZEIT
```

```
C TMAX MAXIMALE ZEIT
```

```
C TCRIT ANSTIEGSZEIT
```

```
C DELT ZEITSCHRITT
```

```
C SIGMA VARIANZ DES RAUSCHENS
```

```
C XM ANFANGSMOMENT
```

```
C XME ENDMOMENT
```

```
C AUS BEIDEN GROESSEN WERDEN DIE ANFANGSEINGANGS-
```

```
C UND ENDINTENSITAETEN BERECHNET
```

```
C AI1 ANFANGSINTENSITAET
```

```
C AI2 ENDINTENSITAET
```

```
C TCPU MAXIMALE CPU-TIME FUER DEN LAUF
```

```
C
```

```
C -----
```

```
C
```

```

C DAS PROGRAMM BENOETIGT FOLGENDE ROUTINEN
C
C MOVE(X,FX,NDIM,DELT)      INTEGRATIONSPROGRAMM
C INIT(X,NDIM,DELT,X1,X2)   BERECHNET DIE ANFANGSWERTE FUER X
C RANDOM(X,DELT,NDIM)       ADDIERT AUF DEN DETERMINISTISCHEN TEIL
C                             DER SDG DEN RAUSCHTERM
C PULS(T,EO)                BERECHNET DEN ZEITABHAENGIGEN IMPULS
C FORCE(T,X,FX,NDIM,DELT)   BERECHNET DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG
C VAR                       BERECHNET DIE MATERIALPARAMETER
C
C *****
COMMON /VAR1/ EO,HKAB,OS,OSS,DOM
COMMON /TRANS/ Q,SIGMA
COMMON /FIELD/ AI1,AI2,TCRIT
DIMENSION X(2002,6),FX(2002)
ICPU=ITIME(0.)
C RESTART PARAMETER >0 DAS PROGRAMM WIRD RESTARTET LESEFILE NR. 39
  READ(5,*) IREST,TCPU
  IF(IREST.GT.0) GOTO 200
  READ(5,3) TEXT
  WRITE(6,3) TEXT
3  FORMAT(10A4)
  NDIM=2002
  ND=NDIM/2
  NDM=ND-1
  WRITE(6,31) NDM
31  FORMAT('/ SIMULATION MIT ',I6,' REALISIERUNGEN')
  PI=DARCOS(-1.D0)
C INPUT:
C EO ANFANGSINTENSITAET DES LICHTFELDES
C Q RAUSCHTERM
C DELT SCHRITTWEITE
C TMAX MAXIMALE ZEIT DIE BERECHNET WERDEN SOLL
C IX RANDOM-VORLAUF
C
  READ(5,*) Q,XM,XME
  READ(5,*) TCRIT
  READ(5,*) DELT,TMAX,IX
  NSAVE=1

```

```

DO 4 J=1,IX
4  A=RNDM(0.1)
   CALL VAR
   WRITE(6,5) HKAB,DOM,OSS,OS
5  FORMAT(/,' MATERIALPARAMETER: '/' KAPPA=',D15.9,' DELTA=',D15.9,
1    ' OSS=',D15.9,' OS=',D15.9)
   SIGMA=DSQRT(Q*DELT/7.D13)*DELT
C ANFANGSSHIFT DES PHASE
   WRITE(6,1) Q,DELT,TMAX,TCRIT
1  FORMAT(/' Q=',D15.9,' SCHRITTWEITE=',D15.9,' MAXIMALE ZEIT='
1    ',D15.9,' TCRIT=',D15.9,/)
C BERECHNUNG DES AUSGANGSFELDES FUER T=0
   XX=(HKAB+OSS*XM)**2 + (DOM+XM)**2
   AO=XM*XX/HKAB**2
   AI1=AO
   PHI=DARCOS((HKAB+OSS*XM)/DSQRT(XX))
   IF(DOM+XM.LT.0.D0) PHI=2.D0*PI-PHI
   X1=DSQRT(XM)*DCOS(PHI)
   X2=DSQRT(XM)*DSIN(PHI)
   WRITE(6,140) X1,X2,AO,PHI
140 FORMAT(' T=0  RE E =',D15.9,' IM E =',D15.9,
1    ' PHI=',D15.9,/)
C BERECHNUNG DES AUSGANGSFELDES . . . T=TMAX
   XE=(HKAB+OSS*XME)**2 + (DOM+XME)**2
   AO=XME*XE/HKAB**2
   AI2=AO
   PHI=DARCOS((HKAB+OSS*XME)/DSQRT(XE))
   IF(DOM+XME.LT.0.D0) PHI=2.D0*PI-PHI
   XE1=DSQRT(XME)*DCOS(PHI)
   XE2=DSQRT(XME)*DSIN(PHI)
   WRITE(6,141) XE1,XE2,AO,PHI
141 FORMAT(' T=TMAX  RE E =',D15.9,' IM E =',D15.9,/, ' IO=',D15.9,
1    ' PHI=',D15.9,/)
   NMAX=1+TMAX/DELT
   NM=NMAX/1.D2
   WRITE(40) Q,DELT,TCRIT,NDIM
   WRITE(40) HKAB,DOM,OSS
C INITIALISIERUNG VON X FUER T=0
   T=0.D0

```

```

EO=DSQRT(AI1)
CALL INIT(X,NDIM,DELT,X1,X2)
WRITE(40) T,EO,(X(K,2),K=1,NDIM)
JN=1
JJ=0
J=1
DO 2 J=1,NMAX
C HOCHINTEGRATION
300 CALL RANDOM(X,DELT,NDIM)
CALL MOVE(T,X,FX,NDIM,DELT)
T=T+DELT
NSAVE=NSAVE+1
IF(NSAVE.NE.100) GOTO 1300
REWIND 41
WRITE(41) X
WRITE(41) EO,T,DELT,TCRIT,Q,AI1,AI2
WRITE(41) JN,JJ,ND,NDM,NM,NDIM,NMAX,J
NSAVE=0
1300 IF(CPU.GT.TCPU) STOP
X1=0.D0
X2=0.D0
XI=0.D0
C BERECHNUNG DER MITTELWERTE
DO 100 LK=1,NDM
XX1=X(2*LK-1,2)
XX2=X(2*LK,2)
XI=XI+XX1*XX1+XX2*XX2
X1=X1+XX1
100 X2=X1+XX2
X1=X1/(DELT*FLOAT(NDM))
X2=X2/(DELT*FLOAT(NDM))
Z1=XI/(DELT**2*FLOAT(NDM))
IF(JN.NE.NM) GOTO 2
JN=0
WRITE(6,101) T,X1,X2,EO,Z1
101 FORMAT(' T=',D15.9,' X1=',D15.9,' X2=',D15.9,' EO=',D15.9,
1 ' <I>=',D15.9)
X1=X(NDIM-1,2)/DELT
X2=X(NDIM,2)/DELT

```

```

CPU=(ICPU-ITIME(0.))/1.D2
WRITE(6,102) X1,X2,CPU
102  FORMAT(' DET. LOES.  X1=',D15.9,' X2=',D15.9,' CPU',F5.1,'SEC')
WRITE(40) T,EO,(X(K,2),K=1,NDIM)
JN=JN+1
STOP
200  REWIND 39
READ(39) X
READ(39) EO,T,DELT,TCRIT,Q,AI1,AI2
READ(39) JN,JJ,ND,NDM,NM,NDIM,NMAX,J
SIGMA=DSQRT(Q*DELT/7D13)*DELT
CALL VAR
NSAVE=0
GOTO 300
END

```

C

```

C+++++

```

C

```

SUBROUTINE INIT(X,NDIM,DELT,X1,X2)

```

C

C INITIALISIERUNG DER ANFANGSWERTE FUER T=0

C DABEI WURDE DIE N-TE ABLEITUNG MIT EINER

C TAYLORREIHE BERECHNET

C DIE PARAMETER SIND IM HP DEFINIERT

C

```

IMPLICIT COMPLEX*16 (A-H,O-Z)

```

```

REAL*8 X,DELT,X1,X2,EO,HKAB,OS,OSS,DOM

```

```

COMMON /VAR1/ EO,HKAB,OS,OSS,DOM

```

```

DIMENSION X(NDIM,6),E(4)

```

```

D2=DCMPLX(2.D0,0.D0)

```

```

D4=DCMPLX(4.D0,0.D0)

```

```

D6=DCMPLX(6.D0,0.D0)

```

```

HKAP=DCMPLX(HKAB,-DOM)

```

```

OMSS=DCMPLX(OSS,-1.D0)

```

```

ES=DCMPLX(X1,X2)

```

```

E(1)=DCMPLX(HKAB*EO,0.D0)-HKAP*ES-OMSS*ES*ES*DCONJG(ES)

```

```

E(2)=-HKAP*E(1)-OMSS*(D2*ES*DCONJG(ES)*E(1)+ES*ES*DCONJG(E(1)))

```

```

E(3)=-HKAP*E(2)-OMSS*(D2*E(1)*E(1)*DCONJG(ES)+D2*ES*E(2)*

```

```

1 DCONJG(ES)+D4*ES*E(1)*DCONJG(E(1))+ES*ES*DCONJG(E(2)))

```

```

      E(4)=-HKAP*E(3)-OMSS*(D6*E(1)*E(2)*DCONJG(ES)
1      D6*E(1)*E(1)*DCONJG(E(1))+D2*DCONJG(ES)*E(3)*ES
2      D6*ES*E(2)*DCONJG(E(1))+D6*ES*E(1)*DCONJG(E(2))
3      ES*ES*DCONJG(E(3)))
      ND=NDIM/2
      DO 1 J=1,ND
      X(2*J-1,1)=0.D0
      X(2*J ,1)=0.D0
      X(2*J-1,2)=DREAL(ES)*DELT**1
      X(2*J ,2)=DIMAG(ES)*DELT**1
      X(2*J-1,3)=DREAL(E(1))*DELT**2/2.D0
      X(2*J ,3)=DIMAG(E(1))*DELT**2/2.D0
      X(2*J-1,4)=DREAL(E(2))*DELT**3/3.D0
      X(2*J ,4)=DIMAG(E(2))*DELT**3/3.D0
      X(2*J-1,5)=DREAL(E(3))*DELT**4/8.D0
      X(2*J ,5)=DIMAG(E(3))*DELT**4/8.D0
      X(2*J-1,6)=DREAL(E(4))*DELT**5/3.D1
1      X(2*J ,6)=DIMAG(E(4))*DELT**5/3.D1
      RETURN
      END

C
C+++++
C
      SUBROUTINE RANDOM(X,DELT,NDIM)
C ADDIERT DIE ZUFALLSKRAEFTE AUF DIE VARIABLEN ZUM ZEITPUNKT T+DELT
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /TRANS/ Q,SIGMA
      DIMENSION X(NDIM,6)
      NDM=NDIM/2-1
      DO 1 J=1,NDM
      FL1=0.D0
      FL2=0.D0
      DO 2 K=1,12
      FL1=FL1+RNDM(0.2)
2      FL2=FL2+RNDM(0.2)
      X(2*J-1,2) = X(2*J-1,2) + SIGMA*(FL1-6.D0)
1      X(2*J ,2) = X(2*J ,2) + SIGMA*(FL2-6.D0)
      RETURN

```

```

      END
C
C+++++
C
      SUBROUTINE PULS(T,EO)
C
C BERECHNUNG DES ZEITABHAENGIGEN IMPULSES
C T TIME EO EINGANGSELEKTRISCHE FELD ALS FUNKTION VON T
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /FIELD/ AI1,AI2,TCRIT
      IF(TCRIT.LE.1.D-2) GOTO 1
      IF(T.GT.TCRIT) GOTO 1
      EO=DSQRT(AI1+(AI2-AI1)*T/TCRIT)
      RETURN
1    EO=DSQRT(AI2)
      RETURN
      END
C
C+++++
C
      SUBROUTINE MOVE(T,X,FX,NDIM,DELT)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION X(NDIM,6),FX(NDIM),C(6),TT(4)
C
C THIS SUBROUTINE COMPUTES THE NEXT SOLUTIONS
C
C INITIALIZE CONSTANTS
      C(1)=3.0D0/16.0D0
      C(2)=251.0D0/360.0D0
      C(3)=1.0D0
      C(4)=11.0D0/18.0D0
      C(5)=1.0D0/6.0D0
      C(6)=1.0D0/60.0D0
      DT3=DELT*DELT*.5D0
C
      DO 400 I=1,NDIM
      DO 100 J=2,6
100  X(I,1)=X(I,1)+X(I,J)

```

```

      DO 2 J=1,3
      J1=J+3
      HOLD=(J+2)*1.D0
2      TT(J)=HOLD*X(I,J1)
      TT(4)=2.0D0*TT(3)
      DO 300 J=1,3
300     X(I,2)=X(I,2)+TT(J)
      X(I,2)=X(I,2)+2.0D0*X(I,3)
      X(I,3)=X(I,3)+TT(1)+6.0D0*X(I,5)+TT(4)
      X(I,4)=X(I,4)+TT(2)+TT(4)
      X(I,5)=X(I,5)+TT(3)
400     CONTINUE
C
C FORCE SUBROUTINE CALCULATES THE RHS OF THE SECOND ORDER DGL
      CALL FORCE(T,X,FX,NDIM,DELT)
C
      DO 600 I=1,NDIM
      THETA1=FX(I)*DT3-X(I,3)
      DO 500 J=1,6
500     X(I,J)=X(I,J)+THETA1*C(J)
600     CONTINUE
      RETURN
      END
C
C+++++
C
      SUBROUTINE FORCE(T,X,FX,NDIM,DELT)
C
C BERECHNET DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN
C WIRD VON MOVE AUFGERUFEN
C X1=RE(E)
C X2=IM(E)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /VAR1/ EO,HKAB,OS,OSS,DOM
      COMMON /TRANS/ Q,SIGMA
      DIMENSION X(NDIM,6),FX(NDIM)
      CALL PULS(T,EO)
      ND=NDIM/2

```

```

DO 1 J=1,ND
X1=X(2*J-1,2)/DELT
X2=X(2*J,2)/DELT
XX=X1*X1+X2*X2
FX(2*J-1) = HKAB*EO - X1*(HKAB+OSS*XX) - X2*(DOM+XX)
1 FX(2*J) = - X2*(HKAB+OSS*XX) + X1*(DOM+XX)
RETURN
END

C
C+++++
C
SUBROUTINE VAR
C
C BERECHNET DIE MATERIALPARAMETER
C
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON /VAR1/ EO,HKAB,OS,OSS,DOM
Q=7.D13
PI=DARCOS(-1.D0)
HOX=3.2027D0
HOM=6.3725D0
HGAM=1.3146D-4
EPSUN=5.D0
EPSO=5.0172D0
DEPS=EPSO-EPSUN
HO=HOM/2.D0-4.D-4
HOR=HOM/2.D0+.125D0
EPS1=EPSUN+(EPSO-EPSUN)*HOX**2/(HOX**2-HO**2)
DOM=HO-HOR
RRR=1.572D-22*(EPS1-EPSUN)**2*(HOM-HO)/(2.D0*PI
1 *DEPS*HOM*HOX*((HOM-2.D0*HO)**2+HGAM**2))*HOR/HO
OS=(HOM-2.D0*HO)*RRR
OSS=HGAM*RRR
DOM=DOM/DSQRT(2.D0*Q*OS)
OSS=OSS/OS
HKAB=6.D-3/DSQRT(2.D0*Q*OS)
RETURN
END

```


C.0 DIE NUMERISCHE BEHANDLUNG VON PARABOLISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Differentialgleichungen der Form

$$u_t = D u_{xx} + f(u) \quad (C.1)$$

bezeichnet man als parabolisch. $f(u)$ ist dabei im allgemeinen eine nicht-lineare Funktion von u . Diese Gleichung beschreibt physikalisch die zeitliche Änderung einer Variablen u durch die Diffusion D und einer Funktion f , die mögliche Gewinn- und Verlustraten von u beschreibt.

Zur besseren Übersicht wird zunächst anstelle der nichtlinearen parabolischen Differentialgleichung die numerische Behandlung der Diffusionsgleichung ($f(u) \equiv 0$) diskutiert. Diese kann für verschiedene Randbedingungen analytisch gelöst werden /Crank 79/.

Numerisch löst man anstelle einer Differentialgleichung immer eine dazu äquivalente Differenzengleichung. Diese erhält man, wenn die kontinuierlichen Variablen x und t diskretisiert

$$t=i\Delta t \quad \text{und} \quad x=j\Delta x \quad (C.2)$$

und die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden

$$u_x \Delta x = u(j+1) - u(j) \quad (C.3)$$

Setzt man beide Definitionen in die Diffusionsgleichung ein, findet man die folgende Differenzengleichung

$$u(i+1,j) - u(i,j) = K \{ \lambda [u(i+1,j+1) - 2u(i+1,j) + u(i+1,j-1)] + (1-\lambda) [u(i,j+1) - 2u(i,j) + u(i,j-1)] \} \quad (C.4)$$

Die numerische Behandlung von parabolischen Differentialgleichungen

Dabei wurden die Definitionen $K = \Delta t / (\Delta x)^2$ bzw. $u(i,j) = u(t,x)$ verwendet. Für die Ortsdiskretisierung wurden außerdem verschiedene Zeiten berücksichtigt. Entwickelt man diese Differenzengleichung in eine Taylorreihe nach den Schrittweiten Δt und Δx , dann erfüllt in niedrigster Ordnung jeder Gitterpunkt die Diffusionsgleichung. Der Fehler dieser speziellen Diskretisierung wird durch die höheren Ordnungen der Taylorentwicklung bestimmt. Bei der numerischen Berechnung sind aber nicht nur Diskretisierungsfehler zu berücksichtigen, sondern auch die während der Rechnung entstehenden Rundungsfehler. Diese können mit Hilfe eines ϵ -Schemas abgeschätzt werden. Dazu nimmt man an, daß ein Fehler ϵ am Gitterpunkt $u(i,j)$ vorhanden sei. Dann untersucht man, wie sich dieser Fehler mit der Zeit im Gitter ausbreitet /Collatz 51/.

Verwendet man anstelle von Gleichung (C.4) eine andere Diskretisierung, ist zu prüfen, ob diese Differenzengleichung noch die ursprüngliche Differentialgleichung beschreibt. Diese Untersuchung ist notwendig, da die Konvergenz der Differenzen- auf die betrachtete Differentialgleichung nicht automatisch gegeben ist /siehe zB Ames 77/.

Entsprechend der Wahl von λ , unterscheidet man zwei verschiedene Methoden zur Lösung der Differenzengleichung :

1) explizite Methoden ($\lambda=0$)

Explizite Gleichungen sind leicht zu programmieren, da sich die Gitterpunkte zur Zeit $t+\Delta t$ mit Hilfe eines rekursiven Schemas (vgl C.4) aus den Punkten zur Zeit t berechnet lassen. Nachteilig an dieser Methode ist ihre schlechte Konvergenz für einige Werte von K . Solange nämlich $K > \frac{1}{2}$ ist, wächst jeder Fehler im System an /Ames 77, Smith 78/.

2) implizite Methoden ($\lambda=1$)

Man erhält die Lösung zur Zeit $t+\Delta t$ nicht mit einer einfach zu programmierenden rekursiven Vorschrift sondern nur mit Hilfe einer Matrixinversion. Der vermehrte numerische Aufwand führt zu einer besseren Konvergenz für größere K . Die ständige Stabilität dieser Methode führt zu aufwendigen Untersuchungen, um die Konvergenz des numerischen Ergebnisses gegen die Lösung der Differentialgleichung zu prüfen.

Bisher liegen nur wenige allgemeine Untersuchungen vor, wie ein nichtlineares System von parabolischen Differentialgleichungen numerisch behandelt werden kann. In der Praxis approximiert man die Differentialgleichungen durch ein System von Differenzengleichungen. Dieses System muß wieder in niedrigster Ordnung in den Schrittweiten verschwinden. Zusätzlich sollte ein Schema gewählt werden, dessen Rundungsfehler schnell ausgedämpft werden.

Die Bilanzgleichung für die Dichte wurde für einen CdS- Kristall (Kap.4.2) sowohl mit einem expliziten als auch mit einem impliziten Verfahren untersucht.

Bei dem expliziten Verfahren wurde die Dichte im Ort diskretisiert und das daraus resultierende System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen wurde mit einem 5.ter Ordnungsverfahren in der Zeit aufintegriert /Nordsiek 62/. Die gerade beschriebene Methode ist numerisch stabiler als ein explizites Verfahren, das auf der Differenzengleichung (C.4) beruht. Zur Kontrolle der erhaltenen Ergebnisse wurden diese mit den Ergebnissen der impliziten Methode ($\lambda=\frac{1}{2}$) verglichen. Beide Programme lieferten im Rahmen der Rechengenauigkeit gleiche Resultate.

Program zur Loesung der Bilanzgleichung fuer die Dichte

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

C*****

C

C DIESES PROGRAMM BERECHNET DIE ZEITABHÄNGIGE BILANZGLEICHUNG
C FÜR DIE DICHTEN IN CDS (MIT DIFFUSION).

C

C-----

C

C PARAMETERLISTE:

C OMEGA	LASERFREQUENZ
C L	LÄNGE DES KRISTALLS
C DELT	SCHRITTWEITE ΔT
C C1	MAXIMALE EINGANGSINTENSITÄT
C TMAX	PULSLÄNGE
C TAU	REKOMBINATIONENZEIT
C DIF1	DIFFUSIONSKONSTANTE
C SKALN	SKALIERUNG DER DICHTEN
C R	REFLEXIONSKOEFFIZIENT
C DL	SCHRITTWEITE IM ORT
C NDIM	ZAHL DER ORTSDISKRETISIERUNGEN
C ND	ZAHL DER RECHENSCHRITTE OHNE OUTPUT

C

C*****

C

C FELDER:

C AI(NDIM)	INTENSITÄT
C YN(NDIM,6)	ABLEITUNGSDICHTE FÜR DIE DICHTEN
C FX(NDIM)	ABLEITUNGEN DER DICHTEN
C ABSOR(500)	VEKTOR DER ABSORPTION
C DENS(500)	DICHTEVEKTOR (für Absorption)
C X(100),Y(100)	PLOTFELDER
C ZZ,ZN	PLOTFELDER

C

C*****

C

C DAS PROGRAMM BENÖTIGT FOLGENDE ROUTINEN

C

C INIT(YN,NDIM) Startwerte für YN

```

C  MOVE(T,YN,FX,NDIM,DELT,AI)      Integrationsroutine
C  PL2D(X,Y,100,1)                 Ausschreiben der Daten auf File
C  FORCE(T,YN,FX,NDIM,DELT,AI)      Bewegungsgleichungen
C  ABSORP(DICHTE,OMEGA,ABS)         Absorption
C
C  * * * * *
C
C  PARAMETER (NDIM=101)
C  REAL*8 L,X(100),Y(100),FX(NDIM),YN(NDIM,6),AI(NDIM)
C  REAL ZZ(10000),XMIN,XMAX,CPU,YMIN,YMAX,ZN(10000)
C  COMMON/FIT/DENS(500),ABSOR(500),DN
C  COMMON/IO/SKALN,TMAX,DL,L,OMEGA,DIF,ND
C  WRITE(6,123)
123  FORMAT(' SUBROUTINE MOVE USED')
C  EINLESEN DER DATEN FÜR DIE ABSORPTION
C  DO 1001 J=1,500
1001  READ(10,1000) DENS(J),ABSOR(J)
1000  FORMAT(2(2X,D12.6))
C  DN=4.99D2/DLOG(6.D13)
C  INITIALISIERUNG DER GROESSEN
C  READ(5,*) TKB,OMEGA,L,IPLLOT
C  READ(5,*) DELT,TPRINT,C1
C  READ(5,*) TMAX,DIF1
C  KPRINT=1
C  R=0.23D0
C  NY=100
C  NX=100
C  IF(IPLLOT.EQ.-1) WRITE(6,154)
154  FORMAT(' FILE-OUTPUT USED')
C  RESONATORLAENGE
C  DL=L/FLOAT(NDIM-1)
C  ABKLINGZEIT DER DICHTE (ZEIT IN ns SKALIERT)
C  READ(5,*) TAU
C  TRANSFORMATIONSKONSTANTE kW*s/meV
C  WI=1.6021892D-25
C  RESKALIERUNG MIT TAU
C  TMAX=TMAX/TAU
C  TPRINT=TPRINT/TAU

```

Die numerische Behandlung von parabolischen Differentialgleichungen

```

C2=C1*(1.D0-R)
IF(DIF1.GT.1.D-6) DIF=DIF1*TAU*1.D-9/(DL*DL)
IF(DIF1.LE.1.D-6) DIF=0.D0
SKALN=TAU*1.D-9*C2/(OMEGA*WI*L)
WRITE(6,11) OMEGA,TAU,L,DELT,C1,DIF1,SKALN
11 FORMAT(' INPUT :',/' FREQUENCY=',D12.5,' MEV', ' TAU=',D12.5,' NS'
1      , ' LENGTH=',D12.5,' CM'
2      / ' TIMESTEP=',D12.5,' MAX. INTENSITY=',D12.5,' KW/CM**2'
3      / ' DIFFUSIONSKONSTANTE=',D12.5,' SKALN=',D12.5)
KPRINT=1
ND=TMAX/(DELT*NY)+DELT*0.01-1
CALL INIT(YN,NDIM)
DO 16 KL2=1,NY
CALL MOVE(T,YN,FX,NDIM,DELT,AI)
AIO=AI(1)*C1
TIM=T*TAU
IF(KPRINT.GT.100) GOTO 15
X(KPRINT)=AIO
YS2=AI(NDIM)*C2*(1.D0-R)
Y(KPRINT)=YS2
KPRINT=KPRINT+1
15 WRITE(6,4) TIM,AIO,YS2
4  FORMAT(' T=',D12.6,' IO=',D12.6,' IT=',D12.6)
IF(KL2.EQ.1) YMIN=TIM
IF(KL2.EQ.NY) YMAX=TIM
IFAC=(NDIM-1)/NX
DO 3 JP=1,NX
ZN(JP+(KL2-1)*NX)=DLOG10(YN(1+JP*IFAC,2)/DELT*SKALN)
3  ZZ(JP+(KL2-1)*NX)=AI(1+JP*IFAC)*C2
16 CONTINUE
IF(IPL0T.GE.0) GOTO 131
CALL PL2D(X,Y,KPRINT-1,1)
XMIN=DL
XMAX=L
WRITE(20,130) NX,NY,XMIN,XMAX,YMIN,YMAX
WRITE(20,130) ZZ
WRITE(20,130) ZN
130 FORMAT(20A4)
131 CPU=(ICPU-ITIME(0.))*1.D-2

```

```

WRITE(6,122) CPU
122 FORMAT(' CPU-TIME : ',F10.2,' SEC')
STOP
END

C
C+++++
C
      SUBROUTINE INIT(X,NDIM)
C * * * * *
C
C  INITIALISIERUNG DER ANFANGSWERTE FUER T=0
C
C  N(t=0,z)=0 und
C
C * * * * *
C  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C  DIMENSION X(NDIM,6)
C  DO 1 I=1,6
C  DO 1 J=1,NDIM
C  1 X(J,6)=0.D0
C  RETURN
C  END
C
C+++++
C
      SUBROUTINE MOVE(T,X,FX,NDIM,DELT,AI)
C  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C  DIMENSION X(NDIM,6),FX(NDIM),C(6),TT(4),AI(NDIM)
C * * * * *
C
C  THIS SUBROUTINE COMPUTES THE NEXT SOLUTIONS
C
C * * * * *
C  INITIALIZE CONSTANTS
C  C(1)=3.D0/16.D0
C  C(2)=251.D0/360.D0
C  C(3)=1.D0
C  C(4)=11.D0/18.D0

```

Die numerische Behandlung von parabolischen Differentialgleichungen

```

C(5)=1.D0/6.D0
C(6)=1.D0/60.D0
DT3=DELT*DELT*.5D0
DO 600 K=1,ND
T=T+DELT

```

C

```

DO 400 I=1,NDIM
DO 100 J=2,6
X(I,1)=X(I,1)+X(I,J)
DO 2 J=1,3
J1=J+3
HOLD=(J+2)*1.D0
TT(J)=HOLD*X(I,J1)
TT(4)=2.D0*TT(3)
DO 300 J=1,3
X(I,2)=X(I,2)+TT(J)
X(I,2)=X(I,2)+2.D0*X(I,3)
X(I,3)=X(I,3)+TT(1)+6.D0*X(I,5)+TT(4)
X(I,4)=X(I,4)+TT(2)+TT(4)
X(I,5)=X(I,5)+TT(3)
CONTINUE

```

C

```

C FORCE SUBROUTINE CALCULATES THE RHS OF THE SECOND ORDER DGL
CALL FORCE(T,X,FX,NDIM,DELT,AI)

```

C

```

DO 600 I=1,NDIM
THETA1=FX(I)*DT3-X(I,3)
DO 500 J=1,6
X(I,J)=X(I,J)+THETA1*C(J)
CONTINUE
T=T+DELT
RETURN
END

```

C

```

C+++++

```

C

```

SUBROUTINE FORCE(T,X,FX,NDIM,DELT,AI)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

```

C * * * * *

```

```

C
C DIESES UNTERPROGRAMM BERECHNET DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN
C ES WIRD VON MOVE AUFGERUFEN
C
C IN DIESER VERSION IST DIE INTENSITAET ADIABATISCH ELIMINIERT
C
C * * * * *

```

```

      REAL*8 X(NDIM,6),FX(NDIM),AI(NDIM)
      COMMON/IO/SKALN,TMAX,DL,Z,OMEGA,DIF,ND
      DATA PI/3.141592654D0/

```

```

C
C BERECHNUNG DES PULSES
C

```

```

      TT=PI/TMAX
      AI(NDIM)=AI(NDIM-1)*DEXP(-ABS*DL)
      IF(A.LT.1.D-10) A=0.D0
      AIO=A*A
      AI(1)=AIO

```

```

C
C BERECHNUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN
C

```

```

      XX=X(1,2)/DELT
      CALL ABSORP(XX*SKALN,OMEGA,ABS)

```

```

C
C LINKER RANDPUNKT ---- VORWÄRTS DIFFERENZEN
C

```

```

      FX(1)=-XX + Z*AI(1)*ABS + DIF/DELT*(X(1,2)-2.*X(2,2)+X(3,2))
      LDIM=NDIM-1
      DO 1 J=2,LDIM
      AI(J)=AI(J-1)*DEXP(-ABS*DL)
      XX=X(J,2)/DELT
      CALL ABSORP(XX*SKALN,OMEGA,ABS)

```

```

C
C MITTLERE RANDPUNKTE ---- ZENTRALE DIFFERENZEN
C

```

```

      1 FX(J)= -XX + Z*AI(J)*ABS + DIF/DELT*(X(J+1,2)-2.*X(J,2)+X(J-1,2))
      AI(NDIM)=AI(NDIM-1)*DEXP(-ABS*DL)
      XX=X(NDIM,2)/DELT

```

```

      CALL ABSORP (XX*SKALN,OMEGA,ABS)
C
C RECHTER RANDPUNKT ---- RÜCKWÄRTS-DIFFERENZEN
C
      FX(NDIM)= -XX + Z*AI(NDIM)*ABS +DIF/DELT*
1      (X(NDIM-2,2)-2.*X(NDIM-1,2)+X(NDIM,2))
      RETURN
      END
C
C ++++++
C
      SUBROUTINE ABSORP(XN,OMEGA,ABS)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON/FIT/DENS(500),ABSOR(500),DN
C LINEARE INTERPOLATION FUER DIE ABSORPTION
      JABS=1
      IF(XN.LE.DENS(2)) GOTO 4
      JABS=DLOG(XN/DENS(1))*DN+1
      ABS=0.E0
      IF(JABS.GT.499) GOTO 1
4 A1=ABSOR(JABS)
      A2=ABSOR(JABS+1)
      DEN1=DENS(JABS)
      DEN2=DENS(JABS+1)
      ABS=(A2-A1)*(XN-DEN1)/(DEN2-DEN1)+A1
1 RETURN
      END

```

REFERENZEN

Agrawal, G.P. und Carmichael, H.J. 1979

Phys. Rev. *B19*, 2074

Ames, W.F. 1977

Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press

Arnold, L. 1972

Stochastische Differentialgleichungen-Theorie und Anwendung

R. Oldenbourg Verlag

Bigot, J.Y. und Hönerlage, B. 1984

phys. stat. sol. (b) *121*, 649, *123*, 201

Bonifacio, R. und Lugiato, L.A. 1978a

Phys. Rev. *A18*, 1129

Bonifacio, R. und Lugiato, L.A. 1978b

Lett. Nuovo Cim. *21*, 501, 510 und 517

Bonifacio, R., Gronchi, M. und Lugiato, L.A. 1979

Nuovo Cim. *B53*, 311

Bohnert, K., Kalt, H. und Klingshirn, C. 1983

Appl. Phys. Lett. *43*, 1088

Born, M. und Wolf, E. 1965

Principles of Optics, Pergamon Press

Brillouin, L. 1960

Wave Propagation and Group Velocity, Academic Press

Carmichael, H.J. 1980

Optica Acta 27, 147

Caulfield, H.J., Horvitz, S. und von Winkle, W.A. 1977

Proc. IEEE 65, Januar

Caulfield, H.J., Horvitz, S., Tricoles, G.P. und von Winkle, W.A. 1984

Proc. IEEE 72, Juli

Chemla, D.S. 1980

Rep. Prog. Phys. 43, 1191

Chemla, D.S. 1983

Helv. Phys. Acta 56, 607

Collatz, L. 1951

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer-Verlag

Crank, J. 1979

The mathematics of Diffusion, 2.ed., Clarendon Press

Dagenais, M. und Sharfin, W.F. 1984a

Appl. Phys. Lett. 45, 210

Dagenais, M. 1984b

Appl. Phys. Lett. 45, 1267

Dingle, R. 1975

in H.J. Queisser (Hrsg.), Festkörperprobleme XV, 21

Döhler, G.H. 1983

in P. Grosse (Hrsg.), Festkörperprobleme XXII, 207

Erneux, T. und Mandel, P. 1983

Phys. Rev. A28, 896

Firth, W.J. und Wright, E.M. 1982

Optics Commun. 40, 233

Flytzanis, G. 1975

Quantum Electronics 1A, 9

Forsythe, G.E. und Wasow, W.R. 1964

Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations

Wiley

Gardiner, C.W. 1983

Handbook of Stochastic Methods, H.Haken (Hrsg.)

Springer Series in Synergetics Vol.13, Springer

Genzel, L., und Martin, T.P. 1973

Surf.Sci. 34, 33

Gerling, R.W. 1984

Z. Phys.

Gibbs, H.M., McCall, S.L. und Venkatesan, T.N.C. 1976

Phys.Rev.Lett. 36, 1135

Gibbs, H.M., Venkatesan, T.N.C., Gossard, A.C., Passner, A. und

Wiegmann, W. 1979

Appl. Phys. Lett.

Gibbs, H.M., Hopf, F.A., Kaplan, D.L. und Shoemaker, R.L. 1981

Phys.Rev.Lett. 46, 474

Gibbs, H.M., Tang, S.S., Jewell, J.L., Weinberger, D.A., Tai, K., Gossard, A.C.,

McCall, S.L., Passner, A. und Wiegman, W. 1982

Appl.Phys.Lett. 47, 221

Gibbs, H.M., Olbright, G.R., Peyghambarian, N., Schmidt, H.E., Koch, S.W., und

Haug, H. 1985

unveröffentlicht

Ginzburg, V.L. 1961

Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma, Gordon and Breach

- Graham, R. und Haken, H. 1971
Z.Phys. 243, 289, 245, 141
- Graham, R. 1980
Z.Phys. B40, 149
- Graham, R. und Schenzle, A. 1981
Phys.Rev. A23, 1302
- Grun, J.B., Hönerlage, B. und Levy, R. 1983
Solid State Commun. 46, 51
- Haken, H. 1970
in S.Flügge, Handbuch der Physik XXV/2c
- Haken, H. 1977
Synergetics, Springer
- Hanamura, E., Tokihiro, T. und Kondoh, K. 1981
unveröffentlicht
- Hänsch, W. und Mahan, G.D. 1983
Phys.Rev. B28, 1902
- Harrison, R.G., Firth, W.J. und Al-Saidi, I.A. 1984
Phys.Rev.Lett. 53, 258
- Haug, H., Koch, S.W., Neumann, R. und Schmidt, H.E. 1982a
Z.Physik B49, 49
- Haug, H. 1982b
in J.Treusch (Hrsg.), Festkörperprobleme XXII, 149
- Haug, H. und Schmitt-Rink, S. 1984
Prog.Quant.Electr. 9, 3
- Haug, H. und Koch, S.W. 1985
unveröffentlicht

Helfant, E 1983

Physica *118A*, 123

Hellwarth, R.W. 1979

Prog.Quant.Elect. *5*, Pergamon

Henneberger, F. und Rossmann H. 1984

phys.stat.sol(b) *121*, 685

Heraeus Quarzschmelze 1983

Transparent and Opaque Fused Silica, Broschüre Q-A 1/112.2, s.14

Hey, J.D. und Hopf, F.H. 1982

Non-linear optics in Quantum Optics, ed.C.A.Engelbrecht,
Lecture Notes in Physics 155, Springer

Hönerlage, B., Bigot, J.Y., Levy, R., Tomasini, F. und Grun, J.B. 1983

Solid State Commun. *48*, 803

Hopfield, J.J. 1958

Phys.Rev. *112*, 1555

Itoh, T. und Maruki, T. 1978

J.Phys.Soc.Japan *45*, 1939

Jain, R.K. und Lind, R.C. 1983

J.Opt.Soc.Am. *73*, 647

Jewell, J.L., Rushford, M.C. und Gibbs, H.M. 1984

Appl.Phys.Lett. *44*, 172

Kempf, K und Klingshirn, C. 1984

Solid State Commun. *49*, 23

Kleinman, D.A. 1962

Phys.Rev. *126*, 1977

Klingshirn,C, Bohnert,K., Kalt,H. und Kempf,K. 1984
AGARD-Meeting : "Digital Optical Circuit Technology", München, September
Bohnert,K., Fidorra,F. und Klingshirn,C. 1984
Z.Physik *B57*,263

Koch,S.W. und Haug,H. 1981
Phys.Rev.Lett. *46*,450

Koch,S.W., Schmidt,H.E. und Haug,H. 1984a
Appl.Phys.Lett. *45*,932

Koch,S.W., Schmidt,H.E. und Haug,H. 1984b
J.Lumin., im Druck

Kurtze,G., Maier,W., Blattner,G. und Klingshirn,C. 1980
Z.Phys. *B39*,95

Levy,R., Bigot,J.Y., Hönerlage,B., Tomasini,F. und Grun,J.B. 1983
Solid State Commun. *48*,705

Loudon,R. 1970
J.Phys. *A3*,233

Lugiato,L.A., Narducci,L.M., Bandy,D.K. und Pennise,C.A. 1982
Optics Commun. *43*,281

Lugiato,L.A. 1984
Progress in Optics XXI, ed. E.Wolf, North Holland

Maddox,R. und Mills,D.L. 1975
Phys.Rev. *B11*,2229

Magnus,W., Oberhettinger,F. und Soni,R.P. 1966
Formulas and Theorems for the special Functions of Mathematical Physics
Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften vol 52, Springer

Mahan,G.D. 1981
Many-Particle Physics, Plenum Press

Mandel,P. und Erneux,T. 1982a
Optics Commun. 42,362

Mandel,P. und Erneux,T. 1982b
Optics Commun. 44,55

März,R., Schmitt-Rink,S. und Haug,H. 1980
Z.Physik B40,9, erratum ibido 41,187

McCall,S.L. 1974
Phys.Rev. A9,1515

Meystre,P. 1978
Optics Commun. 26,277

Miller,D.A.B., Smith,S.D. und Johnson,A. 1979
Appl.Phys.Lett. 35,658

Miller,A., Miller,D.A.B. und Smith,S.D. 1981
Adv.Phys. 30,697

Miller,D.A.B., Chemla,D.S., Damen,T.C., Grossard,A.C., Wiegmann,W.,
Wood,T.H. und Burruh,C.A. 1984
Appl.Phys.Lett. 45,13

Milloni,P.W., Ackerhalt,J.R. und Galbraith,H.W. 1983
Phys.Rev.Lett. 50,966

Moloney,J.V. und Gibbs,H.M. 1982
Phys.Rev.Lett. 48,1607

Munz,M. 1983
Z.Physik B53,311

Neumann,R., Koch,S.W., Schmidt,H.E. und Haug,H. 1984
Z.Physik B55,155

- Nordsiek, A. 1962
Math. Comput. 16, 22
- Peyghambarian, N., Gibbs, H.M., Rushford, M.C. und Weinberger, D.A. 1983
Phys. Rev. Lett. 51, 1692
- Puri, A. und Birman, J.L. 1980
Phys. Rev. Lett. 47, 173
- Risken, H. 1972
Z. Physik 251, 231
- Risken, H. und Vollmer, C. 1980
Z. Physik 39, 89 und 339
- Risken, H. 1984
The Fokker-Planck equation
Springer Series in Synergetics Vol. 18, ed. H. Haken, Springer
- Rosenberger, A.T., Orozco, L.A. und Kimble, H.J. 1983
Phys. Rev. A26, 2569
- Rossmann, H., Henneberger, F. und Voigt, J. 1983
phys. stat. sol(b) 115, K63
- Rösler, M. und Zimmerman, R. 1977
phys. stat. sol(b) 83, 85
- Rustagi, K.C. und Flytzanis, C. 1984
Opt. Lett. 9, 344
- Sargent III, M., Scully, M.O. und Lamb, W.E. jr 1974
Laser Physics, Addison-Wesley Publishing Co
- Sarid, D., Peyghambarian, N. und Gibbs, H.M. 1983
Phys. Rev. B28, 1184

- Schenzle, A. und Brand, H. 1978
Optics Commun. 27, 485
- Schenzle, A. und Brand, H. 1979
Optics Commun. 31, 401
- Schmidt, H.E., Koch, S.W. und Haug, H. 1983
Z. Physik B51, 85
- Schmidt, H.E., Haug, H. und Koch, S.W. 1984
Appl. Phys. Lett. 44, 787
- Schmitt-Rink, S. und Haug, H. 1981
phys. stat. sol(b) 108, 377
- Schmitt-Rink, S. 1982
Dissertation, Frankfurt, unveröffentlicht
- Schmitt-Rink, S., Ell, C., Koch, S.W., Schmidt, H.E. und Haug, H. 1984
Solid State Commun. 52, 123
- Smith, G.D. 1978
Numerical Solution of Partial Differential Equations, Clarendon Press
- Szöke, A., Daneu, V., Goldhar, J. und Kurnit, N.A. 1969
Appl. Phys. Lett. 15, 376
- Thomas, A. 1984
J. Phys. A (Math. Gen.) 17, 1193
- Thuselt, F. 1983
Phys. Lett. 94A, 93
- Toyozawa, Y. 1978
Solid State Commun. 28, 533, ibido 32, 13
- Tran Thoai, D.B. und Haug, H. 1979
J. Lumin. 18/19, 309

Wherrett, B.S., Tooley, F.A.P. und Smith, S.D. 1984
OpticsComm. 52,301

Zardecki, A. 1980
Phys.Rev. A22,1664

Zardecki, A. 1981
Phys.Rev. A23,1281

Zienkiewicz, O.C. 1977
The Finite Element Methods
McGraw-Hill, dritte erweiterte Auflage

Meinem Doktorvater Prof. Dr. H. Haug danke ich für die Aufnahme in das Institut für theoretische Physik, die Anregung zu dieser Arbeit und zu seiner ständigen Diskussionsbereitschaft, die oft zu wertvollen Hinweisen und Ratschlägen führte.

Mein Dank gilt ferner allen Angehörigen des Instituts, die ein Arbeitsklima geschaffen haben, das diese Arbeit erst ermöglichte. Insbesondere danke ich Privatdozent Dr.S.W.Koch und Dr.R.Neumann für die gute Zusammenarbeit und deren Unterstützung beim Schreiben dieser Arbeit.

Für das Anfertigen der Zeichnungen möchte ich mich bei Frau Boffo bedanken.

Diese Arbeit entstand im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 65 "Festkörperspektroskopie" und im Rahmen des Stimulationsprogramms 'European Joint Optical Bistability Project' (EJOB) und wurde dabei von der Deutschen Forschungsgemeinschaft und von der Europäischen Gemeinschaft finanziell unterstützt.

Die numerischen Rechnungen wurden auf den Computeranlagen der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI), des Instituts für theoretische Physik und der Johann Wolfgang Goethe Universität durchgeführt.

Meine akademischen Lehrer waren :

J.Bliedtner, F.Constantinescu, U.Gerhardt, H.Haug, L.L.Hirst, R.Jelitto,
S.W.Koch, C.Klingshirn, W.Martienssen, E.Mohler, B.Rudolph, R.Schmidt,
H.G.Schuster, W.Schwarz und D.Wolf

Harald Schmidt, geb. am 26.8.1957

Großauheim/Main

- 1964-1967 Besuch der August-Gaul-Schule (Grundschule)
in Großauheim
- 1967-1970 Besuch der Franziskaner-Gymnasiums
Kreuzburg in Großkrotzenburg
- 1970-1973 Besuch der Eberhard-Realschule in Hanau
1973 Mittlere Reife
- 1973-1976 Besuch der Hohen Landesschule
Gymnasium in Hanau
- 1976 Abitur
Aufnahme des Physikstudiums an der
Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt/Main
- 1978 Diplom-Vorprüfung
- 1981 Abschluß der Diplomarbeit am Institut für
Theoretische Physik bei Herrn Prof. Dr. H. Haug.
Thema: Zur Theorie des Polarons
Diplom-Hauptprüfung
- 1982 Beginn der Promotion bei Herrn Prof. Dr. H. Haug am
Institut für Theoretische Physik in Frankfurt/Main

